



## 1/ MODALITÉS DE L'ÉPREUVE – ORGANISATION PRATIQUE

L'épreuve orale de mathématiques de la session 2016 dure une heure et se compose de deux parties de durées égales : une première phase de préparation, d'une durée d'une demi-heure et une seconde phase d'interrogation au tableau. Chaque sujet comporte deux exercices indépendants, portant sur des thèmes distincts du programme de première année ou de deuxième année de TSI. Les exercices proviennent d'une banque commune à l'ensemble des examinateurs. Ils sont conçus pour aborder plusieurs pans du programme et rédigés de façon progressive, afin que tout candidat sérieux puisse démarrer sa préparation sans difficulté.

Pendant l'oral, l'interrogateur prend des notes à l'aide d'un ordinateur. Cela ne l'empêche aucunement d'être attentif au discours du candidat.

Des modifications seront apportées pour l'épreuve orale de 2017, afin d'évaluer les capacités de recherche et de mobilisation des connaissances du candidat. L'épreuve aura la même structure en terme de temps de préparation et de nombre d'exercices proposés. **Cependant, le deuxième exercice sera posé sous forme d'une question ouverte et l'ordre de présentation des exercices à l'oral par le candidat sera imposé.**

À titre d'exemple, les énoncés ci-dessous illustrent 3 questions ouvertes qui pourraient être posées lors des épreuves orales.

### Question ouverte en probabilités

Soit  $n$  un entier supérieur à 2.

$n$  individus jettent chacun une pièce honnête. Une personne gagne une partie si elle obtient le contraire de toutes les autres. Combien faut-il en moyenne de parties nécessaires à l'obtention d'un gagnant ?

### Question ouverte en algèbre

$a$  et  $b$  sont des nombres réels non nuls. On note  $M(a, b)$  la matrice suivante :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}. \text{ Calculer } M^n \text{ pour tout } n \text{ entier naturel.}$$

### Question ouverte en analyse

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$ . Étudier la fonction  $f$ .

## **Calculatrice**

Dans un certain nombre de sujets, la calculatrice est autorisée. Dans ce cas, une calculatrice de type « Collège » est fournie au candidat.

L'objectif est d'évaluer les capacités d'utilisation en Mathématiques de l'outil numérique pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures et faciliter la représentation graphique de résultats. Les planches ne sont pas centrées sur l'utilisation de la calculatrice mais celle-ci permet d'éviter certains calculs fastidieux, d'évaluer numériquement un terme d'une suite... Ceci n'exclut ni une question ponctuelle d'algorithmique (exemple : boucle...), ni que certains détails de calcul (à la main) puissent être exigés.

## **Notation et attendus**

La notation des prestations des candidats est basée sur l'évaluation des compétences mathématiques apparaissant dans les programmes de CPGE. La maîtrise du cours est un attendu certain et les examinateurs sont particulièrement attentifs à la connaissance des définitions fondamentales (par exemple, valeur propre, convergence d'une série ou d'une intégrale, définition d'un noyau, d'une image, etc) et à la précision des énoncés des théorèmes principaux du programme.

S'il est important de connaître des méthodes et de développer des automatismes permettant de répondre aux différentes questions posées, l'oral permet de tester systématiquement si ces méthodes reposent sur une compréhension solide des concepts.

## **2/ REMARQUES GÉNÉRALES**

Les examinateurs ont apprécié le sérieux des candidats : ponctualité, politesse, connaissance du cours et des techniques de base, qualité de la présentation de l'exposé oral. Les difficultés théoriques transparaissent en général en avançant dans les sujets, à mesure que les questions deviennent plus abstraites.

Les candidats sont souvent enthousiastes à l'idée de faire un calcul ou d'appliquer une méthode bien précisée dans le cours. Il ne faut pas néanmoins que ceci soit fait au détriment de l'observation du problème posé, souvent abordable par des moyens plus abstraits et moins techniques.

Rappelons aussi que l'examineur n'attend pas le résultat de l'exercice mais plutôt l'exposé d'une démarche, l'expression d'idées. C'est surtout vrai sur les questions les plus difficiles des sujets où la réponse n'est pas toujours facilement atteignable dans le temps restant mais où le candidat peut néanmoins exposer ce qu'il ferait et les situations qu'il a reconnues.

### **Une épreuve orale**

La spécificité de l'épreuve orale de Mathématiques repose sur la gestion de la préparation et sur la gestion du passage.

Le temps de préparation doit être consacré à la mise en relation de la demande de l'énoncé à une compétence énoncée dans le programme de TSI. Ce moment ne doit pas être réduit à une rédaction comme il serait attendu lors d'un écrit classique de concours. Par ailleurs, la lecture des exercices doit être attentive et complète. Il est rarement possible de finir une planche lors de la préparation et une différence s'opère déjà à ce niveau entre les candidats capables de tirer parti de l'énoncé dans sa globalité et ceux qui abordent point par point les questions.

Lors du passage, certains candidats tentent d'écrire le plus possible d'informations au tableau, oubliant en cela qu'il s'agit d'une épreuve orale. D'autres arrivent à un exposé synthétique de leurs idées permettant d'avancer plus rapidement dans les exercices. Dans tous les cas, les candidats seront interrogés sur les deux exercices.

Les courbes et les graphiques peuvent être de bons supports pour peu que les axes et les points remarquables soient indiqués, mais ils ne constituent pas une démonstration. C'est évidemment valable en analyse où des arguments d'intégration se transposent en argument sur des aires, ou des inégalités entre fonctions se traduisent par des propriétés sur leurs courbes. C'est aussi vrai en algèbre où plans et droites illustrent simplement des notions abstraites.

Les capacités du candidat à communiquer, à échanger et à prendre en compte les remarques de l'examineur sont également évaluées. Il est donc judicieux de noter une indication donnée au tableau avec la rigueur inhérente aux mathématiques. Il est à déplorer que certains candidats ne savent pas garder une certaine retenue lors de leur passage, le registre de langue doit rester correct et les remarques sur le sujet desservent le candidat.

Les examinateurs ont apprécié les prestations de candidats se mettant en position de dialogue pour des questions non abordées durant la présentation et se montrant enthousiastes à chercher au tableau.

### **La gestion du tableau**

La gestion du tableau, elle aussi, est appréciée. La présentation doit être claire, ordonnée et les expressions mathématiques doivent respecter la rigueur du formalisme. Il est avisé de faire ressortir les résultats obtenus au tableau, certains oubliant de réutiliser les questions précédentes lors de la résolution du problème.

On rappelle aux candidats qu'ils doivent demander avant d'effacer le tableau. On leur conseille (lorsque le tableau de la salle d'interrogation le permet) de commencer par découper le tableau en deux parties et de s'imposer d'écrire petit, l'examineur étant situé à distance raisonnable.

### 3/ REMARQUES PARTICULIÈRES

#### Remarques particulières en analyse

On observe encore des difficultés (parfois très sérieuses) sur les manipulations calculatoires de base : dérivée (surtout pour les fonctions composées), primitives (surtout de dérivée de fonctions composées, mais également de  $x^n$ ), développements limités.

Les hypothèses du théorème d'intégration par parties, du théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, de Dirichlet (pour les séries de Fourier) en particulier ont posé problème.

Des difficultés perdurent sur les développements limités. La durée de l'épreuve ne permet pas de démontrer les résultats à partir de la formule de Taylor-Young. Une méconnaissance des développements limités usuels pénalise l'avancée du candidat de manière générale et donne une impression négative de la prestation à l'examineur.

Les deux thématiques des séries numériques et des intégrales impropres présentent les mêmes problèmes : les élèves ont trop l'habitude d'utiliser les différents critères de convergence et connaissent trop peu la définition de cette convergence, pourtant essentielle. On peut ainsi régulièrement voir un candidat appliquer un théorème élaboré de convergence par équivalent (et l'appliquer correctement) puis ne pas connaître la définition de la somme partielle d'une série. Les différents théorèmes au programme sont importants et les méconnaître est évidemment sanctionné, mais les définitions de convergence d'une série ou d'intégrale généralisée sont évidemment fondamentales et doivent être maîtrisées.

Les suites ont été l'occasion de mettre en lumière des lacunes importantes sur la notion de monotonie et la confusion entre étude de fonction et étude d'une suite. La récurrence a été malmenée également, certains candidats n'énonçant pas la propriété à démontrer de manière claire ou la supposant vraie pour tous les termes lors de l'hérédité.

Le calcul intégral n'a posé que très peu de difficultés.

#### Remarques particulières en algèbre et en géométrie

Les candidats connaissent de nombreuses techniques d'algèbre linéaire. Elles sont parfois malheureusement un masque cachant une compréhension assez pauvre des principaux concepts de l'algèbre linéaire. Parmi les concepts les plus importants et les moins bien connus, citons la notion de combinaison linéaire. De nombreux candidats ne savent pas donner des exemples de combinaisons linéaires de deux vecteurs. Dans le même ordre d'idée, la définition de la notation « vect » est fort mal connue. Il en est de même pour les noyaux et les images d'applications linéaires.

Par ailleurs, une notion importante et fort mal comprise est la notion de dimension. De très nombreux candidats savent chercher une base d'un sous-espace vectoriel (en tout cas une famille génératrice), puis compter les éléments pour trouver une dimension. Mais très peu

perçoivent la notion de dimension en tant que concept, notamment en tant que nombre de degrés de liberté. C'est pourquoi on attend d'un candidat qu'il soit capable de donner directement la dimension par exemple de  $M_2(\mathbb{R})$  ou de  $\mathbb{R}_2[X]$ , non en pensant à son cours, mais en réfléchissant rapidement aux degrés de liberté associés.

Parmi les méthodes usuelles de l'algèbre linéaire, les techniques de réduction de matrices sont en général bien connues. L'obtention de la matrice d'un endomorphisme n'est pas systématiquement réalisée. La traduction vecteur/coordonnées d'un vecteur pose encore problème, tout comme la preuve de la liberté d'une famille. Les techniques de travail sur les systèmes (passer du cartésien au paramétré ou réciproquement) sont correctement utilisées mais il s'agit souvent d'automatismes.

Le passage d'une base à une autre lors de l'étude d'un endomorphisme révèle les faiblesses d'un candidat habitué au calcul sans une compréhension correcte des concepts manipulés. L'écriture de la représentation matricielle d'un endomorphisme dans une base autre que la base canonique s'est avérée difficile et laborieuse pour certains candidats.

Enfin, si les questions portant sur le produit scalaire n'ont posé aucun problème aux candidats connaissant leur cours, trop peu ont su déterminer rapidement l'équation d'un plan à partir de différentes situations et les exercices portant sur les courbes paramétrées ont mis en avant une mauvaise compréhension de la notion de tangente.

### **Remarques particulières en probabilités**

Les probabilités apparaissent dans une proportion en accord avec le programme.

Une des plus grandes difficultés relevées est la difficulté de compréhension du texte présenté. Certains candidats se contentent de proposer une loi du cours sans prendre garde de justifier le choix de leur réponse, voire l'adéquation de leur réponse au problème posé.

Il est à noter également que les lois usuelles ne sont pas connues, ou alors de manière trop approximative pour permettre de répondre aux attentes de l'énoncé. Ainsi, la loi binomiale est parfois citée sans préciser les valeurs de ses paramètres. De même, un effort devrait être porté sur la connaissance et la notation de l'univers image d'une loi, première donnée essentielle à une présentation plus calculatoire de la loi.

La formule des probabilités totales est trop souvent écrite directement avec des probabilités conditionnelles et la notion fondamentale de système complet d'événements n'est pas bien maîtrisée ou alors non citée de manière automatique.

La formule de Bayes est malheureusement présentée sous une forme mettant en jeu une probabilité conditionnelle au numérateur et non pas la probabilité d'une intersection, ce qui peut gêner grandement son application dans un cadre précis.

La formule des probabilités composées pose elle aussi problème. Elle est néanmoins l'outil indispensable pour calculer la probabilité d'une intersection d'événements non indépendants.

On souhaiterait que les candidats fassent un effort de réécriture des événements (à l'aide d'intersection, d'union, de complémentaires) avant de se lancer dans le calcul des probabilités. La confusion entre événement et probabilité est également à déplorer.

#### 4/ CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Lors de la remise du sujet, les examinateurs recommandent de lire une première fois la totalité de l'énoncé et de partager équitablement le temps de préparation afin d'aborder les deux exercices. Dans la préparation de chaque exercice, il peut être judicieux de réfléchir, avant tout calcul, à la stratégie que l'on abordera pour chaque question.

La calculatrice peut être utile pour répondre à certaines questions calculatoires. Les candidats ne doivent pas hésiter à s'en servir. Pour les calculs ainsi évités, ils doivent aussi se préparer à fournir une technique et à la mettre en place si cela est demandé par l'examineur.

Lors de la présentation orale, les candidats peuvent admettre des questions. Les examinateurs y reviendront en fin d'exposé. Par ailleurs il est inutile d'attendre l'assentiment de l'examineur après chaque question. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire de terminer les deux exercices pour obtenir une très bonne note. Enfin, les qualités de communication du candidat seront valorisées : clarté de l'expression, dynamisme de la présentation, ...

Un exposé succinct mais précis des résultats obtenus est attendu. Dans cet esprit, il est inutile de recopier le détail des calculs au tableau. Il convient d'en indiquer les grandes lignes ainsi que le résultat final. L'organisation des calculs est primordiale, que ce soit pour la recherche d'une erreur ou l'appréciation de la prestation du candidat.

Les théorèmes utilisés seront cités et leurs hypothèses vérifiées avec soin. Il pourra aussi être judicieux d'illustrer ses propos par des figures en géométrie, ou des graphes de fonctions, ou un cercle trigonométrique lorsque que l'occasion se présente.

Dans le cas où une question viendrait à poser problème, il est recommandé d'indiquer toutes les pistes explorées, ce qui permettra d'engager un dialogue avec l'examineur. Rappelons à cet égard que les questions (ou les remarques) de l'examineur ont pour but d'aider les candidats à s'interroger sur la pertinence de leurs résultats et à les remettre sur une bonne voie. En aucun cas, les remarques de l'examineur ne visent à déstabiliser le candidat : il s'agit au contraire de le conduire à se poser les bonnes questions.