



MP

CONCOURS COMMUN INP RAPPORT DE L'ÉPREUVE ORALE DE MATHÉMATIQUES

Les oraux du CCINP, filière MP et filière MPI, se sont déroulés pour la quatrième fois à la cité scolaire Voltaire située 101 avenue de la République, 75011 PARIS.

Pour la session 2023 :

- chaque candidat admissible à l'oral du CCINP filière MP a été convoqué, entre le lundi 19 juin et le samedi 15 juillet, sur trois demi-journées consécutives pour passer les trois épreuves du concours : mathématiques, physique – chimie et langue vivante.
- chaque candidat admissible à l'oral du CCINP filière MPI a été convoqué, entre le lundi 3 juillet et le samedi 8 juillet, sur quatre demi-journées consécutives pour passer les quatre épreuves du concours : mathématiques, physique – chimie, informatique et langue vivante.

Ce rapport est une fois de plus, l'occasion de remercier sincèrement les enseignants de CPGE pour leur investissement colossal, en partie suite au changement de programme (2021 et 2022) et pour leur travail de préparation des élèves aux écrits et aux oraux des concours pendant les deux années qui viennent de s'écouler.

Il nous semble également important de féliciter les candidats pour les efforts fournis et leur sérieux.

La session 2023 des oraux du concours CCINP est marquée par le passage au nouveau programme de mathématiques (2021 et 2022).

Ce rapport s'adresse essentiellement aux futurs candidats des oraux du CCINP filière MP et MPI, aux enseignants de mathématiques de MPSI, MP2I, MP et MPI et aux enseignants collégiés dans ces classes.

Ce rapport a pour objectif :

- d'apporter aux enseignants de mathématiques de MPSI, MP2I, MP et MPI les informations essentielles relatives à l'oral de mathématiques du CCINP filière MP et filière MPI : déroulement de l'épreuve, consignes, erreurs ou lacunes fréquentes relevées, évolution de la banque, éventuels changements par rapport aux sessions précédentes ;
- d'aider les futurs candidats dans leur préparation à l'oral de mathématiques : erreurs à éviter, lacunes à combler, points à consolider, conseils de préparation à l'oral et conseils pour l'oral lui-même.

Le rapport détaillé à suivre des erreurs ou des points faibles en analyse, en algèbre et en probabilités, se veut non exhaustif.

Il répertorie, volontairement, pour une meilleure lecture, seulement les erreurs et points faibles les plus couramment relevés par les examinateurs de mathématiques.

Et, même si ce rapport est essentiellement axé sur les erreurs et points à améliorer des candidats, le niveau des candidats reste globalement satisfaisant.

Nous comptons sur les enseignants des CPGE et les colleurs de ces classes pour inciter les élèves de MPSI, MP2I, MP et MPI à profiter de ce rapport pour se préparer au mieux à l'épreuve orale de mathématiques.

La partie de ce rapport, relative aux erreurs fréquentes des candidats et points à consolider en analyse, en algèbre et en probabilités, peut également s'avérer utile aux candidats lors de leurs révisions pour les épreuves écrites de mathématiques du CCINP filière MP et filière MPI.

QUELQUES CHIFFRES POUR LA SESSION 2023

Moyenne pour l'épreuve de mathématiques :
11,77 en filière MP (11,73 pour la session 2022)
11,58 en filière MPI

Écart-type pour l'épreuve de mathématiques :
4,01 en filière MP (4,00 pour la session 2022).
4,03 en filière MPI

DÉROULEMENT DE L'ÉPREUVE

L'épreuve de mathématiques du CCINP filière MP et filière MPI se déroule de la manière suivante :

- 30 minutes consacrées à l'installation du candidat, aux formalités de début d'épreuve et à la préparation sur table.
- 30 minutes consacrées au passage à l'oral et aux formalités de fin d'épreuve (récupération de la feuille de passage signée par l'examinateur et des effets personnels, récupération du sujet et des brouillons par l'examinateur...).

Dès son entrée dans la salle, un sujet est proposé au candidat.

Ce sujet est constitué de deux exercices :

- un exercice sur 8 points issu de la banque publique accessible sur le site des concours ;
- un exercice sur 12 points propre à chaque examinateur.

Les deux exercices proposés portent sur des domaines différents du programme en vigueur (programme de 2021 et 2022).

Remarques importantes :

- les calculatrices sont interdites pendant toute la durée de l'épreuve ;
- le candidat pourra commencer sa présentation orale par l'exercice de son choix mais sera interrogé sur les deux exercices ;
- les questions de cours sont fréquentes dans la banque.

Consignes et conseils :

- tout théorème utilisé ne figurant pas explicitement au programme sera énoncé correctement et démontré ;
- sur une question non traitée, ne pas hésiter à faire part de sa démarche à l'examinateur même si elle n'a pas abouti.

CRITÈRES D'ÉVALUATION

Sont pris en compte dans l'évaluation les critères suivants :

- la maîtrise des définitions et théorèmes du programme,
- les capacités techniques et calculatoires,
- les prises d'initiatives durant l'épreuve et le degré d'autonomie,
- la pertinence de la réflexion,
- la justesse et la clarté des réponses,
- la rigueur du raisonnement,
- la réactivité aux éventuels conseils et indications de l'examinateur,
- la qualité de la prestation orale et la bonne utilisation du vocabulaire mathématique.

BANQUE PUBLIQUE POUR LA SESSION 2024

Le concept de la banque publique d'exercices de mathématiques avec corrigés pour l'oral du CCINP filière MP et filière MPI persistera pour la session 2024.

La version actuelle, c'est-à-dire celle de la session 2023 (mise à jour du 29/05/23), tient déjà compte du changement de programme de mathématiques (2021 et 2022).

Certains exercices de la banque de la session 2022 ont été supprimés et remplacés, pour la session 2023, par des exercices qui prennent en considération les changements majeurs du programme (extrema locaux, extrema liés, adjoint, norme subordonnée...).

La banque comptera toujours 112 exercices au minimum : 58 exercices d'analyse, 36 exercices d'algèbre et 18 exercices de probabilités.

Cette banque est publiée sur le site des concours :

- 1) <http://www.concours-commun-inp.fr/fr/index.html>
- 2) Onglet : les épreuves orales.
- 3) Onglet : filière MP ou filière MPI.
- 4) Rubrique « préparez votre oral » où la banque est téléchargeable en version corrigée ou non corrigée.

Chaque exercice de la banque est proposé avec un corrigé.

La nouvelle banque pour la session 2024 sera probablement amenée à évoluer en cours d'année. Si tel est le cas, la date de mise à jour sera modifiée sur la banque en ligne.

Cette date de mise à jour figure sur la page de garde de la banque et au pied de chaque page de la banque.

Une première mise à jour sera en ligne courant septembre 2023.

Les modifications par rapport à la version actuelle de la nouvelle banque (version en date du 29/05/23) seront détaillées dans le paragraphe « mises à jour ».

Nous vous conseillons donc de vous connecter, en cours d'année, sur le site des concours, pour vous tenir au courant des éventuelles mises à jour.

REMARQUES D'ORDRE GÉNÉRAL SUR L'ORAL 2023

POINTS POSITIFS

- Globalement, les candidats gèrent correctement leur oral : ils ne se contentent pas de lire leurs notes, profitent de l'oral pour n'écrire au tableau que les éléments essentiels et essayent dans la mesure du possible d'être clairs dans leurs explications orales.
- Il semblerait également que la majorité des candidats soit globalement consciente de l'importance des éventuelles indications orales fournies par l'examinateur. À ce sujet, il semble judicieux de rappeler que l'examinateur est censé intervenir le moins possible durant la prestation du candidat

et que le candidat doit donc, à ce titre, être à l'écoute de la moindre question, remarque ou indication de l'examineur.

- Le facteur stress, même s'il est toujours présent, semble ne pas être handicapant pour une bonne partie des candidats.

POINTS NÉGATIFS

- Même si des progrès sont à noter sur la session 2023, trop de candidats ne connaissent pas des définitions de base : sous-espace vectoriel, application linéaire, norme, produit scalaire, vecteur propre, endomorphisme symétrique, endomorphisme symétrique positif...
- Même si des progrès sont à noter également, encore trop de candidats ne savent pas formuler correctement une définition ou énoncer correctement un théorème fondamental du programme (hypothèses oubliées...).
- Les candidats ne sont, en majorité, pas très solides au niveau calculatoire et perdent alors beaucoup de temps. Les défaillances calculatoires sont relevées par plusieurs examinateurs.
- Manque de rigueur fréquent dans le raisonnement et dans les démonstrations.
- Beaucoup de candidats non francophones gèrent très souvent l'épreuve orale comme une épreuve écrite en écrivant tout au tableau et parfois même en ne parlant pas... Leur manque d'expérience à l'oral est notable.
- Globalement, les candidats manquent de recul sur le cours. Les résultats importants sont rarement synthétisés et hiérarchisés. La connaissance du cours reste souvent superficielle.
- Rappelons à ce sujet que savoir comment se démontrent certains résultats du cours permet de réaliser l'importance des hypothèses et de ne pas les oublier.
- Certains candidats n'ont pas intégré le fait qu'ils sont évalués en temps limité : leur présentation est très lente et ils sont alors pénalisés car ils ne peuvent traiter l'ensemble des deux exercices.

REMARQUES SUR LES EXERCICES DE LA BANQUE POUR LA SESSION 2023

Globalement, les candidats ont travaillé les exercices de la banque. Certains examinateurs notent tout de même que les exercices de la banque semblent globalement moins travaillés par les candidats de la filière MPI que par ceux de la filière MP.

Cela dit, les candidats n'ont pas toujours travaillé les exercices de la banque en profondeur : manque de rigueur fréquent dans les questions de cours, imprécisions, oublis de cas particuliers... Et, si on creuse un peu dans le domaine de l'exercice proposé, on a parfois de mauvaises surprises. Plusieurs examinateurs relèvent également le fait que certains passages des corrigés semblent avoir été appris par cœur, sans être réellement compris.

Ce constat est regrettable car les exercices de la banque devraient constituer un support essentiel de révision et de réflexion pour le candidat et l'occasion de s'assurer qu'il maîtrise bien les concepts sous-jacents à l'exercice.

Les candidats restent faibles, comme les années précédentes, dans les domaines suivants : fonctions à plusieurs variables et équations différentielles.

Par contre, on constate quelques progrès en topologie, depuis trois sessions, sur les exercices de la banque.

Les exercices de probabilités sont, eux aussi, globalement, mieux préparés et réussis depuis trois sessions.

ERREURS FRÉQUENTES, POINTS NON MAÎTRISÉS ET REMARQUES EN ANALYSE

TOPOLOGIE

La topologie est un point faible même si on note des progrès depuis trois sessions.

Elle reste une discipline abstraite. Les examinateurs en sont conscients et notent un réel effort de la part des candidats.

Et, comme les exercices proposés sont souvent des démonstrations de cours ou des applications quasi-immédiates du cours, les efforts fournis par les candidats sont globalement payants.

Cela dit, certains candidats restent tout de même confrontés, malgré leur bonne volonté, à des soucis de rigueur : mauvaise manipulation des quantificateurs, mélanges fréquents entre implication et équivalence...

Enfin, la norme subordonnée pose plus de problèmes qu'on ne l'imaginait alors que cette notion semble moins abstraite que d'autres notions en topologie.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

- Problèmes de raccords des solutions survolés et non compris parfois.
- Manque de technicité dans la recherche de primitives. De ce fait, les candidats sont souvent pénalisés dans leur résolution.
Rappelons par exemple que pour intégrer une fraction rationnelle, il est souhaitable de penser à la décomposer en éléments simples.
- Méconnaissance fréquente de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle.

SÉRIES NUMÉRIQUES

- Très mauvaise maîtrise du vocabulaire et des notations : mélange quasi-systématique (voire systématique), même chez les bons candidats, des notions de série, somme d'une série, somme partielle et suite des sommes partielles d'une série. Et de ce fait, de nombreux candidats manquent de rigueur également dans certains exercices de probabilités.
- Dans le critère spécial des séries alternées, trop de candidats oublient une des trois hypothèses qui assurent la convergence de la série. Par ailleurs, le critère spécial des séries alternées est une condition suffisante de convergence mais non nécessaire.
- Manque fréquent de technique pour étudier l'éventuelle convergence de séries, même sur des exemples très simples. L'outil essentiel pour justifier la convergence d'une série à termes positifs reste l'utilisation d'un équivalent. De nombreux candidats n'y pensent même pas ou peinent à trouver un équivalent simple.
- Trop de candidats pensent encore que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (oubli de passage à la limite) alors, d'après d'Alembert, la série de terme général u_n converge. Contre-exemple simple : la série harmonique.

Rappelons au passage que les séries de Bertrand ne sont toujours pas au programme.

Par contre, la connaissance des résultats sur les séries de Bertrand peut s'avérer tout de même utile car elle permet au candidat d'orienter son raisonnement : partir sur une preuve de convergence ou sur une preuve de divergence en comparant le terme général de la série de Bertrand à celui d'une série de Riemann.

INTÉGRABILITÉ SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE

Manque inquiétant de technique pour justifier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle : en majorité, les candidats ne pensent même pas, si la fonction est positive, à utiliser un équivalent et lorsqu'ils en trouvent un, ils peinent souvent à comparer l'équivalent à une fonction de Riemann qui convient, surtout si la fonction n'est pas intégrable. Ces difficultés sont à mettre sur le compte d'un manque d'entraînement.

SÉRIES DE FONCTIONS

- De grosses lacunes sur la convergence uniforme. Beaucoup de candidats pensent à considérer le reste mais ne le majorent pas indépendamment de x ... Certains arrivent à rectifier lorsqu'on leur demande de reformuler la définition de la convergence uniforme et qu'ils la connaissent.
- Pour la convergence normale sur A , les candidats sont rapidement en difficulté s'il ne suffit pas de majorer $|f_n(x)|$ indépendamment de x sur A . Ils ne pensent pas systématiquement, dans ce cas-là, à chercher $\sup_{x \in A} |f_n(x)|$ en étudiant les variations d'une fonction par exemple. Inversement, d'autres candidats se lancent dans une étude infructueuse des variations de $|f_n(x)|$ (expression compliquée de $|f_n(x)|$ par exemple) alors qu'une simple majoration convient.
- Ne pas oublier que, lorsqu'on parle de convergence uniforme ou normale, il est indispensable de préciser sur quel domaine sinon cela n'a aucun sens.
- Ne pas oublier que la convergence absolue entraîne bien la convergence simple mais en dimension finie.
- En ce qui concerne l'interversion limite et intégrale, encore trop de candidats pensent pouvoir utiliser un argument de convergence uniforme lorsqu'ils ne sont pas sur un segment. Plus généralement, en ce qui concerne les théorèmes d'interversion, les candidats s'emmêlent les pinces très rapidement en mélangeant ceux pour les suites de fonctions, ceux pour les séries de fonctions, ceux valables sur un segment et ceux valables sur un intervalle quelconque. Nous leur conseillons de synthétiser ces théorèmes dans un simple tableau et de les réviser régulièrement. Une carte mentale peut par exemple s'avérer utile pour certains candidats. De plus, quand ils savent quel théorème utiliser, il est rare d'obtenir toutes les hypothèses pour pouvoir l'appliquer. Enfin, les candidats ne pensent pas assez souvent à profiter de l'allègement des hypothèses à vérifier, suite au nouveau programme de mathématiques, lorsqu'ils manipulent des fonctions positives ou inversement, ils pensent pouvoir agir comme si les fonctions étaient positives en terme de vérification des hypothèses lorsqu'elles ne le sont pas.

SÉRIES ENTIÈRES

- La recherche du rayon de convergence ne se limite pas à l'utilisation de la règle de d'Alembert.
- La règle de d'Alembert pour les séries entières reste inutilisable pour les séries lacunaires ou, par exemple, les séries du type $\sum \cos nz^n$. Il est donc fondamental de connaître d'autres techniques présentées en cours ou en séances d'exercices pour déterminer le rayon de convergence : utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, déterminer les valeurs de z pour lesquelles $(a_n z^n)$ est bornée, majorer ou minorer $|a_n z^n|$, repérer une valeur de z intéressante pour laquelle $\sum a_n z^n$ converge ou diverge,...
- La règle de d'Alembert n'est pas une équivalence : une série entière de rayon de convergence R ne vérifie pas forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{R}$.
- Une erreur courante : pour la série entière $\sum a_n z^n$, de nombreux candidats écrivent que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = l|z|$, alors $\sum a_n z^n$ converge si et seulement si $l|z| < 1$.

L'erreur provient du fait que la règle de d'Alembert assure la convergence absolue pour $|z| < 1$ et la divergence pour $|z| > 1$ mais le cas $|z| = 1$ est le cas douteux (cas pour lequel on ne peut conclure).

Donc l'équivalence proposée par les candidats est fautive.

Par contre, dans une telle situation, on peut conclure quant à la valeur du rayon. Reste à le présenter correctement à l'oral, comme à l'écrit d'ailleurs.

- Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence mais pas forcément sur le disque de convergence comme le pensent encore beaucoup trop de candidats.
- Mauvaise connaissance des développements en série entière usuels. De ce fait, les candidats sont souvent en difficulté sur des exercices où il est demandé de calculer des sommes de séries entières ou numériques.
- Bonne maîtrise globale du théorème d'Abel Radial et les candidats y pensent assez naturellement.

INTÉGRALES À PARAMÈTRES

Globalement, les candidats connaissent mieux les hypothèses des théorèmes de continuité et de dérivabilité depuis quelques sessions mais ils ne pensent pas assez souvent, quand c'est nécessaire, à se placer localement pour l'hypothèse de domination. Et certains continuent, pour l'hypothèse de domination, à majorer trop souvent par une fonction qui dépend encore des deux variables de la fonction initiale.

Pourtant, si on leur demande alors l'énoncé du théorème, ils évoquent bien une domination par une fonction qui ne dépend que de la variable d'intégration.

FONCTIONS À PLUSIEURS VARIABLES

Cette partie du programme est encore très mal maîtrisée par les candidats.

On constate que quasiment aucun candidat n'est capable, par exemple, de prouver qu'une fonction à deux variables admet une dérivée partielle par rapport à une de ses deux variables en un point particulier. La règle de la chaîne pose indéniablement des soucis à la plupart des candidats.

Enfin, la partie liée à la recherche d'extrema locaux, globaux et sous contrainte est très mal maîtrisée également. Les théorèmes ne sont globalement pas connus ou mal connus (hypothèses incomplètes). Et, lorsque les candidats les connaissent, ils les appliquent souvent comme des recettes de cuisine sans établir de lien, par exemple avec la formule de Taylor, pour la recherche des éventuels extrema locaux.

C'est regrettable car le contenu de ce chapitre du programme est relativement restreint et les exercices proposés dans la banque sur cette partie restent basiques. Ils demandent juste une bonne connaissance des définitions et théorèmes du cours qui sont peu nombreux.

ERREURS FRÉQUENTES, POINTS NON MAÎTRISÉS ET REMARQUES EN ALGÈBRE

ARITHMÉTIQUE

Beaucoup moins d'impasses sur cette partie du programme que les années précédentes. Les candidats restent fragiles sur ce domaine mais peuvent tout de même traiter des questions simples.

ALGÈBRE LINÉAIRE

- En dimension infinie, pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires sur E , peu de candidats ne pensent pas assez rapidement à raisonner par analyse et synthèse ou quand ils y pensent, la phase de synthèse ou vérification que la décomposition obtenue convient, est très souvent oubliée.
- Être capable de déterminer une base d'un sous-espace vectoriel est primordial et pose pourtant problème à trop de candidats encore. De plus, lorsqu'on demande de vérifier qu'une partie F est un

sous-espace vectoriel de E , il semble intéressant de se demander si ça n'est pas simplement un vectorielisé, ce qui permet simultanément de prouver que c'est un sous-espace vectoriel et d'en déterminer une famille génératrice.

- Enfin, précisons que si on utilise cette méthode par analyse-synthèse pour prouver que A et B sont supplémentaires sur E , alors il n'est pas nécessaire de vérifier en plus que $A \cap B = \{0\}$. La phase d'analyse assure l'unicité de la décomposition.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, il y a bien existence d'un supplémentaire mais il n'est pas unique !!!
- Trop de candidats annoncent u injectif $\Leftrightarrow u$ surjectif $\Leftrightarrow u$ bijectif car u endomorphisme (sans évoquer qu'ils sont en dimension finie) ou car on est en dimension finie juste (sans dire que l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension).
- Beaucoup de candidats ne savent pas trouver rapidement ou simplement une base de l'image pour une application linéaire en dimension finie. Rappelons qu'en dimension finie, l'image est engendrée par l'image d'une base de l'espace vectoriel de départ.
- La formule du rang en dimension finie n'assure pas, comme le pensent encore trop de candidats, que $\ker f$ et $\text{Im} f$ sont supplémentaires.

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

- Ce chapitre met en évidence, au moment de déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme, le manque fréquent de technicité pour calculer un déterminant.
- Les candidats devraient connaître sur le bout des doigts les différentes équivalences au fait qu'un endomorphisme soit diagonalisable... Et c'est malheureusement loin d'être le cas même si ces différents théorèmes sont mieux maîtrisés que sur les sessions précédentes.
- Erreur courante : « un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples ». Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples alors u est diagonalisable, mais la réciproque est bien entendu fautive, il suffit de considérer l'endomorphisme nul comme contre-exemple.
- La donnée d'un endomorphisme u de E et d'un sous-espace vectoriel F de E stable par u devrait, assez mécaniquement, faire penser au candidat à considérer la restriction de u à F . De nombreux exercices sur le chapitre réduction des endomorphismes (ou algèbre linéaire) s'appuient sur cette idée.
- Problèmes courants de vocabulaire.

Exemples : $A^2 + 3A + I_3$ est un polynôme annulateur de A au lieu de $X^2 + 3X + 1$ est un polynôme annulateur de A ; $X^2 + 3X + 1 = 0$ (qui est faux) au lieu de $X^2 + 3X + 1$ est annulateur de A ; le polynôme annulateur au lieu d'un polynôme annulateur.

- Confusions fréquentes entre le polynôme minimal, le polynôme caractéristique et un polynôme annulateur quelconque.
- De grosses confusions sur les polynômes d'endomorphismes :
exemple : si on demande de vérifier que $X^2 + 3X + 1$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u , de nombreux candidats tentent de former $(u(x))^2 + 3u(x) + 1$ au lieu de $u(u(x)) + 3u(x) + x$.
Ce constat explique que ces mêmes candidats peuvent difficilement trouver un polynôme annulateur pour un endomorphisme donné.
- Si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme u , la quasi-totalité des candidats annonçaient lors des sessions précédentes, que les racines de P sont alors exactement les valeurs propres de u , alors que seule l'inclusion de l'ensemble des valeurs propres dans l'ensemble des racines de P est vraie. Il se trouve que depuis la session 2018, cette erreur est beaucoup moins courante...
- Une erreur fréquente : si $\dim \text{Ker } u = p$, alors 0 est valeur propre de multiplicité p .

Rappelons que seul le résultat $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$ est vrai et que ce résultat est très utile.

En fait, pour de trop nombreux candidats, la confusion entre multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique et dimension du sous-espace propre associé est fréquente.

ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

- Confusion entre $A^\perp = B$ et $A \perp B$. $A \perp B$ implique juste que $B \subset A^\perp$ et $A \subset B^\perp$.
- De nombreux candidats semblent avoir oublié l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou oublient les valeurs absolues dans cette inégalité.
- Ne pas oublier que si p est la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors la formule

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \text{ n'est valable que si } (e_1, \dots, e_p) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

- Une mauvaise maîtrise de l'expression d'une projection orthogonale rend difficile le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel donné. Et pourtant c'est un point important du programme.
À ce sujet, un schéma est toujours le bienvenu pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace F .
- Difficultés fréquentes pour trouver une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel, même de dimension 2.
- Manque de technique pour trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F : rappelons qu'une technique efficace en dimension finie reste de trouver une base de F et de traduire que : $x \in F^\perp \Leftrightarrow x$ est orthogonal à chaque vecteur d'une base de F .
- Le théorème spectral assure effectivement l'existence d'une base de vecteurs propres pour un endomorphisme symétrique réel mais trop de candidats oublient qu'il assure aussi l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres... et le caractère orthonormé peut s'avérer bien utile.
- Dans le théorème spectral, lien pas toujours établi entre l'existence d'une base orthonormée et le fait que la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base puisse être orthogonale. Le cours doit être appris, certes, mais aussi compris en profondeur.
- La matrice d'un endomorphisme symétrique est symétrique à condition de se placer dans une base orthonormée.
- Sur cette session encore, trop de candidats ne se souviennent plus de la définition d'un endomorphisme symétrique (ils n'ont qu'une version matricielle de la symétrie en tête) ou pensent que u est symétrique si et seulement si pour tout vecteur x de E , $(u(x)|x) = (x|u(x))$.
- Très rares sont les candidats capables de déterminer concrètement une base orthonormée de vecteurs propres pour un endomorphisme symétrique. Très souvent, les candidats pensent qu'en orthonormalisant avec le procédé de Gram-Schmidt, ça va fonctionner. La démarche est fautive car la base obtenue est bien orthonormale mais n'a aucune raison de rester une base de vecteurs propres. La démarche la plus simple reste de chercher une base orthonormée de chaque sous-espace propre et d'utiliser le fait que leur somme vaut E et qu'ils sont orthogonaux pour conclure.
- Pour vérifier si une matrice donnée est orthogonale, $A^{-1} = {}^t A$ n'est pas la caractérisation la plus pratique !!!
- Une caractérisation très souvent efficace est que A est orthogonale si et seulement si les colonnes de A forment une famille orthonormée.
- Erreur fréquente : A est orthogonale si et seulement si son déterminant vaut 1 ou -1 !!! Rappelons qu'on peut juste annoncer que si A est orthogonale, alors $\det A \in \{-1, 1\}$.
- Attention : un endomorphisme est symétrique (ou autoadjoint) si et seulement si sa matrice est symétrique mais à condition de se placer dans une base orthonormée.
- Globalement, la partie du programme sur l'adjoint semble plutôt bien maîtrisée.

ERREURS FRÉQUENTES, POINTS NON MAÎTRISÉS ET REMARQUES EN PROBABILITÉS

Les exercices de probabilités permettent à l'examineur d'évaluer les capacités de réflexion et d'expression du candidat.

Globalement, les candidats préparent davantage les exercices de probabilités de la banque depuis deux ou trois sessions.

Cela dit, on constate, très souvent, que les explications orales qui accompagnent les résultats proposés pour les exercices de probabilités, comme la détermination d'une loi par exemple, ne sont pas toujours très claires. À tel point qu'il est souvent difficile de comprendre où le raisonnement du candidat est défaillant et de ce fait, il est difficile de l'aider à rectifier.

Pourtant, Boileau disait « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément ».

Plusieurs examinateurs relèvent une méconnaissance des lois usuelles et regrettent aussi un manque de rigueur (pas de noms d'évènements, pas d'argument d'indépendance ou d'incompatibilité évoqué...) pour les justifications des calculs de probabilités.

En bref, les candidats ont souvent du mal à modéliser.

Enfin, de nombreux exercices de probabilités font appel au chapitre sur les séries et les soucis de vocabulaire et de techniques rencontrés dans ce registre se retrouvent dans les exercices de probabilités.

Quelques erreurs courantes relevées :

- Quand on demande la loi d'une variable aléatoire X , le premier point à préciser est le support de la variable X , noté $X(\Omega)$. Très peu de candidats pensent à le préciser.
- Trop de candidats pensent encore que la loi de la somme des variables X et Y est donnée par $P(X + Y = k) = P((X = n) \cap (Y = k - n))$. Ce qui n'a évidemment aucun sens.
- Il est vivement conseillé, quand on demande de trouver l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire X , de regarder d'abord si X ne suit pas une loi connue dont on connaîtrait l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance. Gain de temps assuré !! À condition bien sûr de connaître par cœur les espérances et les variances des lois au programme.
- La covariance de deux variables pose problème alors qu'il s'agit d'une notion importante et peu compliquée.

CONSEILS POUR LES FUTURS CANDIDATS

Concernant la préparation aux oraux

Les attentes fondamentales d'un examinateur restent avant tout :

- une bonne maîtrise des définitions et théorèmes du cours ;
- des capacités calculatoires et des techniques de base acquises ;
Si vous êtes défaillants sur un de ces points là, vous risquez d'être rapidement bloqués dans les exercices proposés.
Autant un examinateur pourra éventuellement vous guider dans votre raisonnement, autant il ne mènera pas un calcul à votre place et ne vous rappellera ni une définition, ni un théorème oublié, ni une technique de base ;
- des explications claires et rigoureuses.

Une condition nécessaire à la réussite de l'oral reste donc de :

- savoir formuler correctement les définitions du programme et énoncer rigoureusement, avec toutes les hypothèses nécessaires, les théorèmes fondamentaux ;
- connaître par cœur ses formules de développements limités, de trigonométrie, de développements en série entière usuels...
- s'entraîner tout au long de l'année sur des exercices calculatoires ;

Domaines conseillés : calculs de développements limités, recherche d'équivalents, recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice, calcul de l'inverse d'une matrice, calculs de déterminants...

- s'entraîner régulièrement, comme un pianiste ferait ses gammes, à des techniques fondamentales : recherche de primitives, étude du caractère intégrable d'une fonction sur un intervalle donné, calcul de la somme d'une série entière en s'aidant des développements en série entière usuels,...
- différencier, une bonne fois pour toutes, les notions suivantes relatives aux séries : somme partielle, suite des sommes partielles, série et somme d'une série et les utiliser à bon escient.

Une bonne maîtrise de ces différents points vous permettra d'acquérir des automatismes, de pouvoir consacrer davantage de temps lors de votre oral aux questions de réflexion et de mettre l'examineur dans de bonnes dispositions pour vous guider éventuellement.

Par ailleurs, nous vous conseillons vivement :

- de travailler en profondeur les démonstrations du cours pour une meilleure mémorisation et assimilation ;
- de vous entraîner à donner des explications orales claires pour les recherches des lois de variables aléatoires en probabilités ;
- de travailler sérieusement les exercices de la banque. Ils balayent la quasi-totalité du programme et constituent donc une bonne base de révisions.
Quelques candidats ont tenté de reproduire, sans les avoir bien compris, des corrigés d'exercices de la banque. L'examineur le repère très rapidement et n'hésite pas alors à questionner le candidat pour obtenir des éclaircissements ;
- d'éviter les impasses.

Pendant les oraux

- La rigueur et la logique sont les mots d'ordre.
- Lors de l'utilisation d'un théorème, signaler à l'examineur toutes les hypothèses nécessaires, même si elles sont vérifiées de manière évidente.
- Quand on pense proposer une équivalence, s'assurer que ça en soit bien une.
- Ne pas mélanger condition nécessaire et condition suffisante.
- Quand il est demandé de prouver une égalité entre deux ensembles, s'assurer que l'on n'a pas juste prouvé une inclusion.
- Soigner toutes les démonstrations.
- Manipuler correctement le vocabulaire mathématique, les quantificateurs, les bornes supérieures...
- Penser aux liens logiques au tableau : quand on passe d'une ligne à l'autre, préciser si c'est une implication, une équivalence...

En termes d'attitude et de stratégie

- Bien lire l'énoncé même si cela semble évident. Si une indication est donnée dans l'énoncé, il est conseillé de la suivre...
- Il semble logique de commencer par l'exercice le plus abouti pendant la préparation. Cela permet une mise en confiance.
- Ne pas recopier tout l'énoncé au tableau, c'est une perte de temps. Par contre, on peut simplement noter les informations essentielles de l'énoncé au tableau pour le confort de l'examineur (lui éviter d'avoir à regarder trop souvent l'énoncé de l'exercice pour suivre).
- Au démarrage d'une question, annoncer rapidement à l'examineur la démarche que l'on compte suivre.
- S'exprimer clairement et ne pas cacher ce que l'on écrit au tableau.
- Ne pas se précipiter lorsque l'examineur pose une question ou demande des éclaircissements.
- Se laisser, si nécessaire, un temps de réflexion, pour éviter le cumul de fausses réponses. Rappelons que les mauvaises réponses sont davantage pénalisantes que les temps morts.

- Éviter de répondre au hasard ou « à côté » de la question posée. Mieux vaut avouer que la réponse n'est pas connue.
- L'examineur est censé peu s'exprimer pendant l'oral. De ce fait, s'il vous donne une indication ou un conseil, il faut le saisir car il y a de fortes chances de ne pas pouvoir s'en sortir sans.
- Éviter de dire que c'est évident au cours d'un raisonnement au cas où ça ne le serait pas.
- Si l'examineur vous signale une erreur, éviter de tenter de prouver qu'il n'y en a pas. Essayer plutôt de trouver l'erreur en question.
- Éviter de couper la parole à l'examineur.
- Ne pas attendre que l'examineur valide chacune des lignes écrites pour avancer.
- Éviter d'être passif durant l'oral.
- Même si on ne sait pas traiter une question, faire part à l'examineur des voies envisagées et des raisons pour lesquelles elles n'ont pas abouti.
- Si la situation s'y prête, commencer par étudier des cas particuliers pour une meilleure visualisation (par exemple si la question porte sur le calcul d'un déterminant de taille n , commencer par de petites valeurs de n avant de tenter une généralisation).
- Ne pas effacer le tableau avant d'avoir demandé l'autorisation à l'examineur. Il est censé pouvoir noter tout ce que vous faites pendant l'oral.

Pour résumer : soyez productifs, rigoureux, dynamiques et pertinents dans votre démarche scientifique. L'examineur saura l'apprécier.