CONCOURS
COMMUN
INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Lundi 29 avril : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

EXERCICE 1

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice dans $\mathcal{B}_0$ est $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -2 \\ -4 & b & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

On note Id l'application identité de E.

Q1. **a)** Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P_1 = 1 + X + X^2$ soit un vecteur propre de f. Quelle est alors la valeur propre de f associée au vecteur propre P_1 ?

b) On suppose que $(a, b) = (4, 1)$. Vérifier que -1 est une valeur propre de f. Déterminer $\ker(f + Id)$.

Pour la suite de l'exercice, on pose $a = 4$ et $b = 1$.

Q2. Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base $\mathcal{B}'$ de E formée de vecteurs propres de f.

Q3. On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (p_0 + p_1 X + p_2 X^2,\, q_0 + q_1 X + q_2 X^2) & \longmapsto & p_0 q_0 + p_1 q_1 + 2 p_2 q_2 \,. \end{array}$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

Q4. **a)** Pour tout λ réel appartenant au spectre de f, on note E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ.
On sait que -1 est une valeur propre de f.
Montrer qu'il existe une valeur propre μ de f telle que E_{-1} et E_μ sont orthogonaux pour le produit scalaire φ. Déterminer μ.

b) La base $\mathcal{B}'$ de la question **Q2** est-elle orthogonale pour le produit scalaire φ ?

Q5. Soit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (1 + X + X^2, 2X - X^2, 1 + X^2)$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ forme une base de E.

b) En utilisant une méthode similaire au processus de Gram-Schmidt, déterminer une famille de vecteurs (Q_1, Q_2, Q_3), orthogonale pour le produit scalaire φ, vérifiant les conditions suivantes :

- $\mathrm{Vect}(Q_1) = \mathrm{Vect}(1 + X + X^2)$,
- $\mathrm{Vect}(Q_1, Q_2) = \mathrm{Vect}(1 + X + X^2, 2 - X^2)$,
- (Q_1, Q_2, Q_3) est une base de E.

c) Déterminer les normes des vecteurs Q_1, Q_2 et Q_3 pour le produit scalaire φ.

Q6. **a)** Soit $P \in E$. On note(α, β, γ) les coordonnées de P dans la base (Q_1, Q_2, Q_3) déterminée précédemment.
Montrer que les réels α, β, γ peuvent être déterminés à l'aide des produits scalaires de P et des vecteurs Q_i.

b) Montrer que les sous-espaces $F = \text{Vect}(Q_1)$ et $G = \text{Vect}(Q_2, Q_3)$ sont supplémentaires dans E.

c) Rappeler la définition de la projection vectorielle sur F parallèlement à G.
Déterminer la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique de E.

EXERCICE 2

Q7. Soit la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \dfrac{3}{1+x^2}$.

a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 + x - 3 = 0$.
En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée α.
Vérifier que : $1 < \alpha < 2$.

Q8. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = f \circ f\,(x) - x$.
On admet que l'on peut factoriser h sous la forme :

$$h(x) = -\frac{(x^2 - 3x + 1)(x^3 + x - 3)}{(x^2 + 1)^2 + 9}.$$

a) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ a exactement trois solutions distinctes : α, β, β', avec $0 < \beta < \alpha < \beta'$, où α est le réel défini à la question **Q7b**.

b) Déterminer le signe de h sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta} = \beta'$ et $f(\beta') = \dfrac{1}{\beta'} = \beta$.

On considère désormais la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
où f est la fonction définie et étudiée à la question **Q7**.

Q9. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs.

Q10. **a)** On suppose que $u_0 = 1$, calculer les valeurs de u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

b) On suppose que $u_0 = 2$, calculer les valeurs de u_1 et u_2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

Q11. **a)** Montrer que $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) On suppose que $u_0 \in [0, \beta]$. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

Pour la suite de l'exercice, on admet le résultat suivant : quelle que soit la valeur donnée à $u_0 \in \mathbb{R}^+$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

c) Comparer les sens de variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ pour les deux cas particuliers $u_0 = 1$ et $u_0 = 2$.

d) On appelle ℓ une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\ell \in \{\alpha,\, \beta,\, \beta'\}$.

e) Si ℓ' est une **éventuelle limite réelle** de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, quelles sont les valeurs possibles de ℓ' ?

On étudie désormais la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon quelques cas particuliers de valeurs de u_0.

Q12. On suppose que $u_0 = \alpha$. Quelle est la particularité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? La suite est-elle convergente ?

Q13. On suppose que $u_0 \in \{\beta,\, \beta'\}$. Quelle est la particularité des suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$?
Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q14. Dans cette question, on suppose que $u_0 \in [0, \beta[$.

a) Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \beta]$.

b) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\beta', 3]$.

c) En utilisant les variations de suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, montrer qu'elles sont convergentes et déterminer leurs limites respectives.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

EXERCICE 3

Q15. **a)** Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$ est convergente.

b) En déduire que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$ est convergente.

Le but de l'exercice est de calculer la valeur de I.

Q16. **a)** Montrer que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

b) **i)** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq \exp(-t^2).$$

ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \exp(-t^2) \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(I_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1,\ u_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t, \quad I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

On définit également la suite d'intégrales généralisées $(v_n)_{n\geq 1}$ par :

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

On notera que l'intervalle d'intégration des suites $(v_n)_{n\geq 1}$ n'est pas le même que celui des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(I_n)_{n\geq 1}$.

i) Justifier la convergence des intégrales généralisées v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq I_n.$$

iii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq I_n \leq v_n.$$

Q17. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x$. On admet le résultat : $a_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

a) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_1(x) = \sqrt{n} \times \sin x$, exprimer u_n en fonction de a_{2n+1}.

b) À l'aide du changement de variable $t = \varphi_2(x) = \sqrt{n} \times \tan x$, montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ v_n = \sqrt{n} \times a_{2n-2}.$$

Indication : on rappelle la relation $\cos^2 t = \dfrac{1}{1 + \tan^2 t}$.

c) En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\mathrm{d}x$.

EXERCICE 4

On considère un jeu où une équipe de trois joueurs, J_1, J_2 et J_3, doit résoudre une énigme. Les joueurs peuvent obtenir de l'aide en interrogeant deux sources d'information susceptibles de leur communiquer au maximum quatre indices notés i_1, i_2, i_3 et i_4. Les deux sources d'information sont appelées S_A et S_B. Une seule source peut être interrogée par l'ensemble de l'équipe. Le choix de la source d'information se fait de la façon suivante : on jette successivement deux dés à 6 faces, équilibrés, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note S la valeur obtenue en ajoutant le nombre de points donné par le lancer de chacun des dés. Si $S \leq 6$, on interroge S_A, sinon on interroge S_B.

Q18. On note A l'évènement "interroger S_A" et B l'évènement "interroger S_B".
Déterminer les probabilités de chacun de ces évènements.

Lorsqu'une source est interrogée, elle peut révéler de 0 à 4 indices parmi les 4 possibles. L'information fournie peut être modélisée comme étant un sous-ensemble de $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. On rappelle que l'ensemble des parties de I est noté $\mathcal{P}(I)$ et que $\text{card}(\mathcal{P}(I)) = 2^4 = 16$.
Ainsi, l'ensemble vide $\emptyset$ et les sous-ensembles $\{e_1, e_4\}$, $\{e_2, e_3, e_4\}$ représentent 3 informations susceptibles d'être communiquées, fournissant respectivement 0, 2 et 3 indices parmi les 4 possibles.
La source S_A connait 8 informations et la source S_B connait les 8 informations restantes. La répartition entre S_A et S_B est effectuée de façon aléatoire pour chaque partie jouée par l'équipe. À l'issue de cette répartition, S_A dispose de k informations permettant de connaître l'indice i_4 et les $8 - k$ informations restantes ne donnent pas l'indice i_4.
La source interrogée révèle à chaque joueur, successivement et de façon indépendante, une information choisie au hasard parmi les 8 dont elle dispose. Il est ainsi possible que la même information soit communiquée à deux ou trois joueurs de l'équipe.

Q19. Combien y a-t-il d'informations contenant l'indice i_4 ? On pourra raisonner en distinguant les valeurs possibles du cardinal d'un sous-ensemble de I.

Q20. Déterminer, en fonction de k, les probabilités des évènements suivants :

- évènement C_i : "le joueur J_i obtient de la source S_A une information contenant l'indice i_4 ", pour $i \in \{1, 2, 3\}$;
- évènement C'_i : "le joueur J_i obtient de la source S_B une information contenant l'indice i_4 ", pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Q21. Quelle est la probabilité que l'équipe obtienne exactement deux informations fournissant l'indice i_4 ?

Q22. Quelle est la probabilité que chacun des joueurs obtienne une information fournissant l'indice i_4 ?

Q23. L'équipe a obtenu trois informations fournissant chacune l'indice i_4. Quelle est la probabilité que ces informations proviennent de la source S_A ?

Q24. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles la probabilité obtenue à la question précédente est supérieure ou égale à 0,8.
Indication : on pourra tester les valeurs numériques possibles avec une calculatrice.

EXERCICE 5

On décide de simuler des tirages répétés avec remise à l'aide d'un programme informatique. Ce programme détermine aléatoirement un entier $n \in \mathbb{N}^*$, puis génère une liste de n valeurs, elles aussi choisies aléatoirement parmi les nombres 0 et 1. Les choix des n valeurs sont indépendants et à chaque étape de génération d'un élément de la liste, la probabilité d'obtenir 1 est égale à λ, avec $\lambda \in]0, 1[$.

On note :
- L_n l'évènement : "on a généré une liste de n valeurs" ;
- S_k l'évènement : " la liste obtenue contient exactement k fois la valeur 1" ;
- T_k l'évènement : "la liste obtenue contient au moins k valeurs".

Q25. Soient $p \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que la probabilité d'obtenir la valeur n est égale à $a \times p^n$.
Rappeler la valeur de la somme de la série numérique convergente $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} P(X = n)$.
En déduire la valeur de a.

Q26. Déterminer la probabilité de l'évènement T_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Q27. **a)** Déterminer $P(S_k|L_j)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $j \geq k$.
b) En déduire que la probabilité d'obtenir exactement k fois la valeur 1 dans une liste générée contenant au moins k valeurs est égale à :

$$P(S_k \cap T_k) = \frac{a}{k!}(\lambda p)^k \sum_{j=k}^{+\infty} j(j-1)\cdots(j-k+1)\Big((1-\lambda)p\Big)^{j-k}.$$

Q28. **a)** Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$, rappeler l'expression de son développement en série entière au voisinage de 0 et la valeur du rayon de convergence de la série obtenue. On ne demande pas de démontrer ces résultats.
b) Énoncer le théorème de dérivation d'une série entière sur son intervalle de convergence. En déduire la probabilité de l'évènement S_k conditionné par l'évènement T_k.
On pourra utiliser le résultat : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \ f^{(k)}(x) = \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}$.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1164 – D'après documents fournis