CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TPC

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

* * * * *

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

* * * * *

Exercice 1

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, où n est un entier naturel.

I. Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

1) Soit l'application f définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ f(P) = (2X-1)P' + (X^2 - X - 2)P''.$$

Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la restriction de f à $\mathbb{R}_n[X]$, notée f_n, est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Donner la matrice M_n de f_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

4) Déterminer les valeurs propres de f_n et en déduire que f_n est diagonalisable.

5) Comment, à partir du spectre de f_n, peut-on déterminer le noyau de f_n et le rang de f_n ?

6) On suppose que $n \geq 2$. On note $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f_n rangées par ordre croissant : $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.
Exprimer λ_k en fonction de k pour $k \in [\![0, n]\!]$.
Montrer que si un polynôme P est un vecteur propre de f_n associé à la valeur propre λ_k, alors P est de degré k.
Indication : on pourra raisonner sur le degré de P.

7) Montrer qu'il existe une unique famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, telle que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k soit un polynôme unitaire de degré k et un vecteur propre de f.

8) Etude d'un cas particulier
Dans cette question, on suppose $n = 3$.
Donner la matrice M_3 de f_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, le spectre de f_3 et déterminer les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
Rappel : la définition des polynômes P_k est donnée à la question précédente.

II. Etude d'un produit scalaire de $\mathbb{R}_n[X]$

On définit l'application φ par :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{2} P(t)Q(t)\mathrm{d}t\,.$$

De façon usuelle, on confond un polynôme formel P et sa fonction polynomiale associée $t \mapsto P(t)$.

1) Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note désormais $\varphi(P, Q) = < P, Q >$ le produit scalaire de deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$.

2) **a)** Montrer que :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, < f(P), Q > = -\int_{-1}^{2} (t^2 - t - 2) P'(t) Q'(t) \mathrm{d}t \,.$$

b) En déduire que :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, < f(P), Q > = < P, f(Q) > \,.$$

Que peut-on en déduire pour l'endomorphisme f ?

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie en **I.7)** est une famille orthogonale pour le produit scalaire $< ., . >$.

3) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P_k \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^{\perp}$.

b) Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Indications : on pourra utiliser les résultats de **I.8)**.
On rappelle que $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 2

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Le Comité des Fêtes d'une Ecole d'Ingénieurs organise le Gala annuel de l'école.

I. Modélisation du nombre de participants

En observant le nombre de participants des manifestations des années précédentes, le Comité suppose que le nombre de participants à la soirée peut être modélisé par une variable aléatoire N, suivant une loi de Poisson de paramètre 3 000.

1) Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? Rappeler la formule donnant $P(N = k)$.

2) Calculer l'espérance mathématique de N. Pour les organisateurs, que représente $E(N)$?

3) La soirée est prévue dans un château. A l'arrivée, chaque participant devra déposer ses affaires dans l'un des trois vestiaires.
On appelle les vestiaires V1, V2 et V3. Chaque participant choisit son vestiaire de manière aléatoire, indépendamment du choix des autres participants.

On suppose, dans cette question uniquement, qu'il y a 2 500 participants à la soirée.

On considère la variable aléatoire X, où X désigne le nombre de participants choisissant le vestiaire V1.

a) Quelles valeurs la variable aléatoire X peut-elle prendre ?

b) Déterminer la probabilité qu'aucun participant ne choisisse le vestiaire V1.

c) Déterminer la probabilité que tous les participants choisissent le vestiaire V1.

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

II. Où est Séverine ?

Séverine est la Présidente du Club Danse. On désigne par E l'évènement "Séverine est dans la salle de bal" et on estime que la probabilité de cet évènement est $p(E) = 0,8$.

1) Léa est inscrite au Club Danse. Les informations qu'elle fournit sont fiables à 70 %, c'est-à-dire que, en moyenne, sur 100 affirmations, 70 seront justes.
Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?
On désignera par $E1$ l'évènement "Léa dit que Séverine est dans la salle de bal".

2) Benoît est aussi membre du Club et ses propos sont fiables à 90 %.
On désignera par $E2$ l'évènement "Benoît dit que Séverine est dans la salle de bal".
On considère que les affirmations de Léa et de Benoît sont indépendantes.
Si Léa dit que Séverine est dans la salle de bal et si Benoît dit qu'elle n'y est pas, quelle est la probabilité que Séverine soit effectivement dans cette salle ?

III. Quatre salles, quatre ambiances

Le château dispose de deux grandes salles de réception et de deux salles plus petites. Le Comité des Fêtes a donc décidé de prévoir des animations différentes dans chaque salle. On appelle S1 et S2 les deux grandes salles, S3 et S4 les deux petites salles.

On suppose que, toutes les heures, les participants décident de changer de salle. On s'intéresse à la localisation d'un participant appelé Z.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n la variable aléatoire désignant la salle dans laquelle se trouve Z à l'instant n.
Y_n peut prendre les valeurs $S1$, $S2$, $S3$ et $S4$, selon le choix de salle fait par Z.

1) Si Z est dans une grande salle, il peut choisir d'aller dans l'une ou l'autre des petites salles S3 et S4 avec la même probabilité q, ou d'aller dans l'autre grande salle avec la probabilité $2 \times q$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve.
Déterminer la valeur de q.

2) Si Z est dans une petite salle, il peut choisir d'aller dans l'autre petite salle avec la probabilité q', ou dans l'une ou l'autre des grandes salles S1 et S2 avec la même probabilité $2 \times q'$. Il ne reste pas dans la salle où il se trouve.
Déterminer la valeur de q'.

3) Montrer que :

$$P(Y_{n+1} = S1) = \frac{1}{2}P(Y_n = S2) + \frac{2}{5}P(Y_n = S3) + \frac{2}{5}P(Y_n = S4).$$

4) De façon analogue, déterminer, en fonction de $P(Y_n = S1)$, $P(Y_n = S2)$, $P(Y_n = S3)$, et $P(Y_n = S4)$, l'expression des probabilités $P(Y_{n+1} = S2)$, $P(Y_{n+1} = S3)$ et $P(Y_{n+1} = S4)$.

5) Si on considère la matrice $V_n = \begin{bmatrix} P(Y_n = S1) \\ P(Y_n = S2) \\ P(Y_n = S3) \\ P(Y_n = S4) \end{bmatrix}$, montrer qu'il existe une matrice A, telle que : $V_{n+1} = A\,V_n$.
Déterminer la matrice A.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer V_n en fonction de A, V_0 et n.

7) On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{4}{13} - \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} + \frac{1}{2}a_n + \frac{5}{26}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n & \frac{4}{13} - \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \\ \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{5}{26}b_n & \frac{5}{26} - \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n & \frac{5}{26} + \frac{1}{2}c_n + \frac{4}{13}b_n \end{bmatrix}$$

avec $a_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$, $\quad b_n = \left(\frac{-3}{10}\right)^n$, $\quad c_n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n$.

On suppose qu'au début de la soirée, 50 % des participants sont dans la salle S1 et les 50 % restant dans la salle S3. Les salles S2 et S4 sont donc vides.

a) Que peut-on en déduire pour V_0 ?

b) Si la soirée était sans fin, quelle serait la probabilité de localisation de Z pour $n \to +\infty$?

c) Il est prévu que la soirée dure de 22 h 00 à 4 h 00. Dans quelle salle Z se trouvera-t-il à 4 h 00 avec la plus forte probabilité ?

Problème

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise certains résultats établis dans les parties I et II.

I. Décomposition en série de Fourier

Soit l'application g, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi[$ par :

$$\forall x \in [-\pi,\, \pi[,\; g(x) = x^2.$$

1) Donner l'allure de la représentation graphique de g sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Déterminer la série de Fourier de la fonction g.

3) Etudier la convergence de la série de Fourier de g.

4) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

II. Etude d'une fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

3) Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. Etude de la fonction dilogarithme et calcul de sommes de séries numériques

Soit la fonction L définie par $L(x) = \displaystyle\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$.

1) **a)** Justifier que $L(x)$ est définie pour tout $x \in]-\infty, 1[$.

b) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $-\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$?

c) Expliquer pourquoi L est continue sur $]-\infty, 1]$.

d) Montrer que L est développable en série entière sur un intervalle I à préciser. On donnera le développement en série entière de L.

2) **a)** En utilisant le changement de variable $s = 1-t$ et une intégration par parties, démontrer la relation :

$$\forall x \in]0,1[,\ L(x) = -\ln(1-x)\ln(x) + L(1) - L(1-x).$$

b) En utilisant les résultats de la partie **I.** et de la question **III.1)**, déduire de la relation précédente la valeur numérique de $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

c) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

3) **a)** On rappelle que L est développable en série entière sur I. Montrer que :

$$\forall x \in I,\ L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

b) En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

4) L'objectif de cette cette question est d'établir et d'utiliser la relation suivante :

$$\forall x \in]0,1[,\ L(x) - L(-x) + L\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - L\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \times \ln(x).$$

a) Vérifier que : $\forall x \in]0,1[,\ \dfrac{1-x}{1+x} \in]0,1[$.

b) Que peut-on dire de la quantité $\dfrac{x-1}{x+1}$ pour $x \in]0,1[$?

c) Soit $x \in]0,1[$, on pose :

$$\varphi(x) = L(x) - L(-x) + L\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) - L\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big) - \ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) \times \ln(x).$$

Montrer que φ est définie et constante sur $]0,1[$.

d) Justifier soigneusement la valeur de φ sur $]0,1[$.

e) Déterminer $x_0 \in]0,1[$ solution de l'équation $x = \dfrac{1-x}{1+x}$.

En déduire la valeur de la somme de la série numérique convergente $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 15 1330 – D'après documents fournis