1/ CONSIGNES GENERALES

Présentation du sujet

Le sujet proposait l'étude de la famille des polynômes de Bernstein sous des aspects géométriques, algébriques, probabilistes et analytiques. Le problème comportait 5 parties largement indépendantes les unes des autres. La géométrie était abordée exclusivement en partie 1 et l'algèbre linéaire en partie 2. Les probabilités étaient évoquées en parties 2 et 3 alors que l'analyse intervenait de façon essentielle en parties 3, 4 et 5. On commençait donc avec quelques propriétés géométriques des polynômes de Bernstein à l'ordre 1 et 2 en allant jusqu'à la représentation d'un pseudo-arc de cercle compris dans une partie convexe triangulaire. On introduisait ensuite deux endomorphismes φn *et* B_n *de* $\mathrm{R}_n[X]$| dont les propriétés étaient liées au fait que la famille des polynômes de Bernstein correspond à une base de $\mathrm{R}_n[X]$. La loi binomiale était alors utilisée afin d'aller plus loin dans l'étude de la restriction de $\mathrm{R}_2[X]$ de B_n ainsi que dans l'approximation de f sans faire trop de calculs. Par cette voie, on obtient une démonstration « naturelle » de la convergence uniforme de $B_n(f)$ vers f sur [0,1] qui se rapproche des caractérisations classiques des opérateurs de Bernstein. Les deux dernières parties recoupaient ces propriétés avec quelques études d'intégrales classiques, d'intégrales à paramètre (fonction hypergéométrique), de séries entières et de séries de fonctions.

Dans son ensemble, le sujet cherchait à évaluer les candidats sur les connaissances d'une partie la plus large possible du programme. La difficulté des questions se voulait progressive et de nombreuses questions correspondaient à des applications directes du cours. Par ailleurs, les questions ouvertes n'étaient pas bloquantes si bien qu'un candidat n'ayant pas trouvé le bon résultat à une question ouverte pouvait continuer sa composition sans difficulté. Le sujet se donnait également pour but d'évaluer chez les candidats les six compétences explicitement détaillées dans le programme de PCSI-PC. La longueur relative du sujet était un point essentiel d'évaluation de l'efficacité des candidats.

Problèmes constatés par les correcteurs

Les correcteurs se sont accordés pour dire que l'épreuve avait été mieux réussie par les candidats que la précédente épreuve. Une évaluation spécifique de l'ensemble des compétences requises par le programme de PCSI-PC a en effet permis de rattraper, en partie, les graves faiblesses constatées dans la pratique du raisonnement et la maîtrise du formalisme mathématique. La présentation écrite est très bonne, en règle générale. La compétence de modélisation (surtout sur des situations probabilistes) semble être en nette amélioration par rapport à l'année précédente. La représentation matricielle est bien assimilée alors que la représentation géométrique pose tout de même des problèmes aux trois quarts des candidats. La mise en œuvre de stratégies pour répondre correctement à un maximum de questions a encore progressé si bien que les copies traitant sérieusement moins de 10 questions sont très rares. En revanche, les candidats ayant bien traité la quasi-totalité du sujet sont moins nombreux que d'habitude. L'ensemble a donné plus d'homogénéité aux copies que les années précédentes.

Tout cela ne doit pas pour autant occulter les graves lacunes qu'ont rencontrés les correcteurs cette année. On constate notamment :

- une maîtrise très insuffisante du socle des connaissances ; les définitions moins courantes sont souvent oubliées et les hypothèses de la plupart des théorèmes sont négligées ;

- les candidats s'engagent souvent dans des calculs sans prendre de recul alors que le résultat peut être obtenu avec beaucoup plus de concision ;
- les liens logiques entre les différentes parties d'un même raisonnement ne sont pas toujours très clairs ;
- beaucoup de candidats essaient de « bluffer » le correcteur en faisant croire qu'ils ont obtenu honnêtement le résultat ; cette attitude n'a pas manqué d'être préjudiciable à l'évaluation globale de la copie.

Sur quelques points du programme de PCSI-PC, nous ajouterons les remarques détaillées suivantes :

- en géométrie, l'étude de la convexité d'une partie et l'étude des courbes paramétrées doit être améliorée ;
- en probabilités, l'ensemble des valeurs de X, les formules pour E(aX+b), pour V(aX+b) et la formule de Koenig-Huygens (pour calculer V(X) ou pour déduire E(X^2) à partir de E(X) et de V(X)) doivent être mieux connues ;
- en algèbre, le théorème de concaténation de familles de vecteurs propres, la continuité des applications linéaires en dimension finie et les conditions suffisantes pour avoir une égalité entre deux polynômes doivent être mieux assimilés ;
- en analyse, le théorème sur l'image continue d'un segment, le théorème des accroissements finis, la définition des sommes de Riemann, la mise en œuvre du théorème de comparaison pour la convergence d'intégrales ou de séries (obtention d'équivalents plus simples ou/et utilisation de règles de négligeabilité), la bijectivité d'une fonction, le changement de variable dans une intégrale, les développements et propriétés des séries entières et la convergence normale de séries de fonctions doivent être mieux compris.

2/ REMARQUES SPECIFIQUES

Partie 1 (Géométrie)

1.a, b et c. Questions très bien réussies.
2. La définition d'une partie convexe n'est pas connue dans la moitié des cas.
3.a. Les candidats se contentent souvent de vérifier que x(t)+y(t) ≥ 1 mais oublient de vérifier que x(t) et y(t) sont dans [0,1].
3.b. Question peu traitée.
3.c. Question très peu traitée et quasiment jamais réussie : au mieux, les candidats vérifient que le vecteur directeur précédemment trouvé est colinéaire au vecteur A(t)B(t).
3.d. Question peu traitée. Pour une moitié de ceux qui ont traité la question, la représentation de la courbe n'est pas en accord avec les résultats précédents.

Partie 2 (Algèbre linéaire et probabilités)

4.a. La linéarité a été vue sauf par ceux qui n'ont pas voulu détailler le calcul. La stabilité de R_n[X] par φ_n n'a été maîtrisée que dans un tiers des cas.
4.b. Beaucoup de calculs malhonnêtes sur cette question : quand le résultat d'une question est donné, on s'attend bien sûr à ce que les calculs soient particulièrement bien détaillés.
4.c. Question très mal réussie pour justifier le caractère basique. Très peu de candidats ont compris que la liberté de la famille des p_{k,n} résultait de la question précédente et du théorème de concaténation de familles de vecteurs propres associées à des valeurs propres distinctes. Beaucoup de candidats ont prétendu que la famille était étagée en degré. La diagonalisabilité de φ_n a été en revanche bien comprise.
4.d. Bien pour φ_n mais plus rarement vu pour B_n.

5.a. Bien pour la description du modèle mais il manquait souvent la définition précise de la variable aléatoire attachée à l'expérience décrite.
5.b. L'ensemble des valeurs d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale est très mal connu.
5.c et d. Beaucoup de calculs inutiles. L'espérance et la variance pour une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ne sont pas suffisament connues et les formules pour E(aX+b) et V(aX+b) non plus. Il suffisait ensuite d'utiliser la formule de Koenig-Huygens pour obtenir E(X^2) à partir de E(X) et de V(X). Les candidats ont très souvent fait des calculs longs et laborieux pour retrouver E(T_r) et E(T_r^2) à la main. Au lieu de gagner du temps, plusieurs candidats croient que ce genre de question est une occasion de redonner une démonstration classique sûrement déjà vue en cours. Quelques candidats ont toutefois démontré astucieusement les deux dernières égalités de 5.d en réutilisant la question 4.b et la linéarité de φ_n.
5.e. Question peu traitée et très rarement comprise. Les candidats ont souvent essayé de justifier les résultats en indiquant que les calculs étaient « généralisables » à t quelconque sans être suffisamment convaincants. On rappelle que si deux polynômes coïncident sur une infinité de valeurs, alors ils sont égaux. Cet argument classique permet de redonner, par exemple, une démonstration probabiliste de la formule du binôme de Newton.
6. Beaucoup de candidats se sont contentés de vérifier que R_2[X] était un sous-espace vectoriel de R_n[X] et ont prétendu que la stabilité par B_n était conséquence de 4.a en prenant n = 2.
7. La représentation matricielle donnant A_n était le point essentiel de la question et seulement un tiers des candidats a fait le lien avec la question 5.
8.a. Question assez bien réussie même si les réponses ont été parfois bâclées, ce qui a souvent coûté quelques points. On rappelle que le polynôme caractéristique doit être signalé comme scindé dans R[X] si on veut pouvoir conclure à la diagonalisabilité à partir du calcul des multiplicités des valeurs propres et des dimensions des sous-espaces propres correspondants.
8.b, c, 9.a et b. Questions très bien réussies.
9.c. La continuité des applications linéaires en dimension finie a été rarement évoquée et beaucoup de candidats ont cru avoir traité correctement cette question par « passage à la limite » ou par « linéarité ».
9.d. Cette question était une conséquence facile de 7 et 8.c mais peu de candidats l'ont vu ainsi. Dans ce cas, ils ont refait des calculs pour en arriver au fait que A_n est diagonalisable. Certains ont alors bien justifié que l'on pouvait prendre encore la même matrice de passage Q mais pour d'autres, ce dernier point n'était pas clair.
9.e. Question bien réussie.
9.f. Question moins bien réussie à cause de la limite de (1-1/n)^n qui n'est correcte que dans un tiers des cas.

Partie 3 (Analyse et probabilités)

10.a. Beaucoup de candidats utilisent à bon escient la positivité de la variance pour obtenir E(Y)^2 ≤ E(Y^2). En revanche, le « passage à la racine carrée » donne systématiquement le résultat voulu sans autres détails (ou certains disent que E(Y) est aussi positif pour s'affranchir des valeurs absolues sur E(Y)).
10.b. La définition première de V(Y) sous la forme de E((Y-E(Y))^2) est très rarement connue et les candidats ont donc souvent refait le calcul de E((Y-E(Y))^2) en développant le carré.
11.a. Il y avait deux théorèmes à utiliser dans cette question et souvent aucun des deux n'était correctement utilisé car l'hypothèse du théorème sur les inégalités des accroissements finis est souvent oubliée. Au final, on ne sait pas souvent d'où vient M_f ou alors c'est un majorant de f ou de f' et non de |f'|.
11.b. Question bien réussie.
11.c. Beaucoup de malhonnêtetés ont été relevées dans cette question : il fallait utiliser l'inégalité triangulaire et aussi montrer que pour t dans [0,1], t(1-t) ≤ 1/4.
11.d. Beaucoup de copies ne mentionnent pas la norme infinie et confondent donc la convergence simple avec la convergence uniforme.

Partie 4 (Intégrales)

12. Cette question était une conséquence directe de la question 11.d. Ceux qui ont voulu faire intervenir un théorème de convergence dominée n'ont pas su donner une hypothèse de domination réellement correcte.
13.a. Question très bien réussie.
13.b. Les candidats ont souvent fait cette question à « l'envers » en compliquant beaucoup les calculs. Le calcul de l'intégrale de $p_{k,n}$ n'a pas été relié à celle de $p_{k-1,n}$ mais plutôt à celle de $p_{0,n}$ par itérations successives (sans évoquer de récurrence).
13.c. Question bien réussie.
14. Le lien avec les sommes de Riemann a été très rarement évoqué et presque jamais correctement établi. Là encore les candidats prétendent que la méthode utilisée est « clairement » généralisable à une fonction seulement continue.
15.a. Question souvent traitée mais très mal réussie. La continuité de la fonction intégrée n'est pas toujours évoquée. L'équivalent simple en $+\infty$ est très souvent donné comme étant $x.u^{a+b-c}$ pour tout x au lieu de $x^b.u^{a+b-c}$ si $x>0$. Avec l'hypothèse faite sur a,b et c, les candidats en déduisent alors que la fonction intégrée est $o(1/u^2)$ au voisinage de $+\infty$ alors que c'est faux dans le cas où $a+b-c=-2$.
15.b. Question assez souvent traîtée mais mal maîtrisée. Le calcul de la dérivée partielle n'est pas toujours juste et l'hypothèse de domination rarement correctement traitée.
15.c. Cette question n'a été souvent réussie que partiellement car le calcul de $h([0,1[)$ est rarement évoqué.
15.d. Le changement de variable a rarement abouti, souvent à cause de $h'(t)$ qui n'était pas mis sous la bonne forme.

Partie 5 (Séries de fonctions)

16. Près d'un tiers des candidats s'est précipité sur la formule de Stirling et a prétendu (quasiment toujours à tort) au résultat indiqué en début de question.
17. Question très mal réussie, même par ceux qui ont trouvé un équivalent correct pour $f_n(t)$. Nombreuses confusions entre suites de fonctions et séries de fonctions.
18. Beaucoup de précipitation dans cette question qui révèle parfois de graves incompréhensions dans la manipulation des sommes.
19.a. Question assez bien réussie par ceux qui ont repéré cette question facile.
19.b. La rédaction de cette question a été très rarement correcte. Presque personne ne parle de rayon de convergence de la série entière si bien que la dérivation terme à terme d'une série entière relève du miracle. D'autres candidats essayent de partir plutôt du développement en série entière de $(1+u)^\alpha$ mais ils sont rares à s'en sortir correctement.
19.c. Question peu traitée.
19.d. Très peu de candidats font le lien avec les questions 18 et 19.c pour en déduire que la convergence normale ne peut pas avoir lieu. Plusieurs candidats ont tenté de déterminer si la série des normes infinies de f_n était convergente mais personne n'a correctement abouti au résultat voulu.