CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration que pour tout entier naturel *n,* la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \mathrm{d}x = n!$.

Q1. Démontrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tout couple (P,Q) de polynômes de E, $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x$. On notera $\| \ \|$ la norme euclidienne associée.

Q2. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $F = \mathbb{R}_1[X]$ noté $P_F(X^2)$.

Q3. Justifier que $\|X^2 - P_F(X^2)\|^2 = \|X^2\|^2 - \|P_F(X^2)\|^2$ puis calculer le réel : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\mathrm{d}x$.

EXERCICE 2

Soit $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé et suivant la même loi définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(Y = k) = pq^k .$$

On considère les variables aléatoires Z et T définies par $Z = \sup(X,Y)$ et $T = \inf(X,Y)$.

Q4. Pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, déterminer $P\big((Z = m) \cap (T = n)\big)$ en distinguant trois cas : $m > n$, $m < n$ et $m = n$.

Q5. En déduire la loi de la variable aléatoire Z.

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q6. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteur puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q7. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :
Si $P_1, P_2, ..., P_r$ sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T, si u est un endomorphisme de E alors :

$$\mathrm{Ker}\left[T(u)\right] = \mathrm{Ker}\left(P_1(u)\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(P_2(u)\right) \oplus ... \oplus \mathrm{Ker}\left(P_r(u)\right).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soit P et Q deux polynômes premiers entre eux.
Justifier que $\mathrm{Ker}\left(P(u)\right) \subset \mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right]$ (de même, on a : $\mathrm{Ker}\left(Q(u)\right) \subset \mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right]$).

Démontrer que : $\mathrm{Ker}\left[(PQ)(u)\right] = \mathrm{Ker}\left(P(u)\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(Q(u)\right)$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q8. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.

On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1,2\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} ... P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + ... + R_mQ_m = 1$.

Q9. On pose alors pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $\{1,2,...,m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E.
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u.

Q10. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique : $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$
(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i.
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus ... \oplus N_m$.

Q11. Démontrer que $E = \mathrm{Im}\, p_1 \oplus \mathrm{Im}\, p_2 \oplus ... \oplus \mathrm{Im}\, p_m$.

Q12. Démontrer que pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $\mathrm{Im}\, p_i = N_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q13. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q14. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.
Donner, sans détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1,2,...,m\}$, $p_i = \dfrac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q15. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q16. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Justifier que la matrice A est diagonalisable et calculer la matrice A^2.
b) En déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A puis la décomposition spectrale de la matrice A. On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.
c) Calculer, pour tout entier naturel q, A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2.

Q17. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égal au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v.

Q18. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$.
Démontrer que la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q19. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille $(p_1, p_2, ..., p_m)$ des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q20. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E, tels que pour tout entier q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une « réciproque ».

Soit u un endomorphisme de E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel q on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.
Démontrer que u est diagonalisable.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1159 – D’après documents fournis