1/ Présentation du sujet

Le sujet est constitué d'un seul problème qui traite de matrices stochastiques dans un contexte probabiliste de chaîne de Markov (section I). On étudie le spectre d'une matrice stochastique A dans la section II et la suite des itérés de A dans la section III. On introduit aussi la notion de probabilité invariante par A (section IV), suivie de son calcul effectif par ordinateur (section V), c'est une partie d'algorithmique à rédiger en langage Python.

Les notions abordées sont assez variées :

- probabilités : formule des probabilités totales et des probabilités composées,
- réduction des matrices, indice d'une matrice nilpotente, rang d'une transposée, puissances de matrices par le binôme de Newton,
- continuité d'une application linéaire en dimension finie, utilisation de partie fermée,
- algorithmique avec Python : modélisation d'une matrice par une liste de listes, programmation d'un maximum (norme infinie) et condition d'arrêt lors de l'itération d'un vecteur par une matrice.

2/ Appréciation générale des copies

Le texte de l'épreuve était clair, de difficulté et de longueur raisonnables. Beaucoup d'étudiants ont ainsi parcouru le problème en totalité, quelques-uns ont d'ailleurs réussi le sans-faute. La partie algorithmique, pourtant en dernière partie, a dans l'ensemble été bien traitée.

La moyenne de l'épreuve est de 11,04 avec un écart-type de 4,49. Ce sujet a donc rempli son rôle de sélection des candidats.

On conseille fortement aux futurs candidats de mettre en évidence les résultats : souligner ou encadrer les résultats rend la copie bien plus lisible.

3/ Remarques détaillées par question

Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Q1. Lorsque l'on utilise la formule des probabilités totales, il faut préciser la partition ou le système complet d'événements que l'on utilise.

Q2. Idem.

Q3. L'énoncé demandait une valeur approchée au centième près, certains n'ont pas respecté cette consigne.

Q4. La formule des probabilités composées n'est pas toujours écrite.

Q5. La justification du fait que A est diagonalisable est très souvent réussie. La matrice de passage n'est pas toujours donnée ou n'est pas à coefficients entiers.

Q6. Si on justifie la continuité des applications $M \to QMQ^{-1}$ et $M \to \mu_0 M$ par le fait qu'elles sont linéaires, il ne faut pas oublier de préciser que ce sont des applications linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

Q7. Le vecteur ligne obtenu comme limite est parfois oublié.

Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Q8. Question plutôt réussie.

Q9. L'inégalité triangulaire n'est pas toujours bien utilisée.

Q10. Il ne fallait pas oublier d'utiliser l'argument qu'un vecteur propre x est non nul pour diviser par $\|x\|_\infty$.

Q11. Dans l'ensemble question réussie.

Q12. La rédaction est souvent confuse (certains candidats oublient de préciser que l'on travaille sur la *i*-ème coordonnée). Cela montre à nouveau la difficulté des candidats à manipuler des inégalités avec des valeurs absolues.

Q13. La première partie de la réponse est en général donnée, même dans les copies faibles. En revanche, il est très surprenant de voir que les figures demandées, pourtant faciles, sont rarement faites par les candidats.

Q14. Il fallait réaliser qu'une matrice est inversible si, et seulement si 0 n'est pas valeur propre.

Q15. Ici il fallait penser à la caractérisation du rang à l'aide de déterminants extraits : comme $A-I_p$ possède un déterminant extrait non nul de taille $p-1$, on a $rg\left(A-I_p\right) \geq p-1$.

Les réponses sont souvent imprécises.

Partie III - Itérés d'une matrice stochastique

Q16. On demandait la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Il est regrettable que certains ne sachent pas y répondre.

Q17. Bien traitée si la question précédente l'était.

Q18. On demandait de prouver le résultat de cours suivant : si N est une matrice nilpotente de M_p(IK), alors $N^p = 0$. Cette question a posé des difficultés.

Q19. Certains candidats veulent utiliser la formule de Stirling et s'arrangent pour obtenir l'équivalent demandé sans préciser la limite non triviale de $\left(\frac{n}{n-k}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q20. Oubli parfois de préciser que I_p et N commutent pour utiliser le binôme de Newton.

Q21. La limite est souvent obtenue mais les justifications parfois insuffisantes. Il fallait par exemple indiquer que les valeurs propres distinctes de 1 avaient un module strictement inférieur à 1.

Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

Q22. Beaucoup de candidats oublient l'hypothèse de positivité des coefficients dans la définition de vecteurs stochastiques. Pour l'autre condition, c'est bien rédigé par la plupart des candidats, soit par un argument séquentiel, soit par image réciproque d'un fermé par une application continue.

Q23. Bien dans l'ensemble pour ceux qui ont abordé cette question.

Q24. Là aussi, beaucoup oublient la condition de positivité. Il y a eu aussi beaucoup d'erreurs dans la formule du produit matriciel qui n'est pas connue par un certain nombre de candidats. Cela s'est vu à cette question et par la suite.

Q25. Peu de candidats pensent à utiliser le caractère fermé.

Q26. Bien réussie par une majorité de candidats.

Q27. Ici il fallait utiliser le fait que la transposition conserve le rang, puis utiliser le théorème du rang.

Certains ont pensé à tort que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}^t A$, en confondant avec $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathrm{Ker}^t A$.

Q28. Réussie seulement par les meilleurs candidats qui parviennent à faire une bonne synthèse des questions précédentes.

Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Cette partie a dans l'ensemble été bien traitée.

Q29. Quelques erreurs parfois.

Q30. Bien réussie dans l'ensemble. Certains candidats, influencés sans doute par l'exemple, ne traitent que le cas de vecteurs de longueur 2.

Q31. Quelques erreurs dans la recherche du maximum de la liste, oubliant des valeurs absolues.

Q32. On rencontre parfois ici des erreurs mathématiques : la formule du produit matriciel est fausse par confusion entre vecteur ligne et vecteur colonne.

Q33. Cette question a moins bien été réussie. Certains ne pensent pas à utiliser la fonction précédente `difference`.
On rappelle que si $t1 = [6, 5]$ et $t2 = [1, 3]$, l'instruction $t1 - t2$ est incorrecte et ne renvoie pas la différence des vecteurs. De même $t1 + t2$ n'est pas la somme des vecteurs mais la concaténation des listes $t1$ et $t2$ et donc vaut $[6, 5, 1, 3]$.