1/ Présentation du sujet

Le sujet proposait dans un premier temps deux exercices. Le premier, assez simple, utilisait la fonction génératrice de la loi de Poisson afin d'en déduire des moments. Le deuxième montrait l'importance d'une hypothèse dans un des théorèmes d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Dans un second temps, un problème étudiait différentes utilisations du théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur un segment et proposait une démonstration probabiliste de ce théorème.

Cette épreuve interdisait l'usage des calculatrices.

2/ Remarques générales

La moyenne de l'épreuve est de 10,88 et l'écart type est de 4,12. Ce sujet a permis de bien classer les candidats. La moyenne est très convenable et les notes sont bien étalées.

L'énoncé était clair et les questions, de difficulté variée, permettaient à tous les candidats, même faibles de s'exprimer. Les contre-exemples abordés, fournis ou à définir, permettent de bien distinguer les candidats inventifs de ceux qui reproduisent des raisonnements stéréotypés.

Globalement, les candidats ont balayé l'ensemble du sujet.

Un effort a été fait cette année en ce qui concerne le soin apporté aux copies.

Conclusion
L'attention des candidats est attirée sur le fait que les textes des sujets de mathématiques nécessitent une connaissance très précise des points fondamentaux du cours.

Sont ainsi valorisés :

- L'apprentissage du cours et en particulier les démonstrations des points importants, les exercices et exemples de base.
- Les qualités de rigueur et de clarté d'exposition que l'on peut attendre d'un futur ingénieur.
- L'aptitude à savoir manipuler sa calculatrice (cette année en mathématiques 2).
- Le soin apporté à la présentation de son travail.

La devise donnée aux concepteurs est : un candidat de niveau moyen et qui a travaillé doit pouvoir obtenir la moyenne au moins.

3/ Remarques détaillées par question

Premier exercice

Exercice assez bien traité, de niveau assez simple pour ne pas défavoriser les 5/2.
On demandait de déduire l'espérance et la variance à partir de la fonction génératrice de la variable aléatoire. Toute autre réponse, même juste, ne rapportait pas de point.
Plusieurs candidats laissent la fonction génératrice sous forme de série.

Deuxième exercice

Cet exercice a été très moyennement réussi.

1. On constate une grande difficulté pour établir l'intégrabilité d'une fonction non positive :
- oubli de la valeur absolue, oubli de distinguer deux voisinages (intervalle « deux fois » ouvert) ;
- oubli de préciser que la fonction est d'abord continue sur *I.*

En général les questions « simples » sont à traiter avec rigueur.

2. Beaucoup d'erreurs de calcul, en particulier pour une somme géométrique qui commence à $n=1$ (et non $n=0$), quelques confusions entre *x* et *n*.
Curieusement, l'erreur « $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=0 \Rightarrow \sum f_n$ converge » est apparue plusieurs fois.

3. « sans aucun calcul » a été mal compris et certaines copies proposent plusieurs lignes de calcul !

Problème

1. L'argument de la non continuité de *h* en 0 a souvent été évoqué, à tort car *h* n'est pas définie en 0 !
La réponse la plus fréquente ici est que le théorème de Weierstrass ne peut pas s'appliquer car l'intervalle $]0,1]$ n'est pas un segment !
Peu de candidats ont pensé à l'argument : la fonction *h* n'étant pas bornée sur *I*, elle ne peut être approchée uniformément par une suite de polynômes (P_n).

2. Trop peu de candidats pensent à utiliser le fait qu'un espace vectoriel de dimension finie est fermé.

3. Beaucoup de points perdus sur une question simple : démontrer une norme qui utilise un sup…
La rédaction de la convergence de la suite (P_n) pour les normes N_1 et N_2 est en général décevante.

4. Il était indiqué « on pourra utiliser le résultat suivant …» : on ne demande pas de démonstration du résultat !
Le théorème d'interversion limite intégrale est parfois mal expliqué.
L'erreur la plus fréquente est « $\int_a^b f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$ car f^2 positive ».

5. On rencontre des copies utilisant des notions de dimension pour établir une somme directe mais l'espace ici est de dimension infinie.

Un conseil général est de chercher, en premier, à répondre « non » à une question du type « a-t-on ».

6. On trouve parfois des inégalités faisant intervenir des complexes, ou encore $\left|e^{i\theta}\right| < 1$ …
On oublie parfois d'initialiser la récurrence.
Sinon question assez bien réussie.

7. Question peu réussie.
On rencontre : $u_{n+1} = g(u_n)$ avec g croissante donc la suite (u_n) est croissante !

8. Bien lire la question : on propose souvent des contre-exemples avec une fonction f non continue sur l'intervalle.

9. Question assez bien traitée ; les candidats font le lien avec la question 7.

10. Question assez bien traitée. Toutefois, on attendait une légère explication de la majoration de $x(1-x)$. Il n'était pas utile de redémontrer la variance de la loi binomiale.

11. Certaines copies ne reconnaissent pas la continuité uniforme.
Quelques réponses « bricolage » mais, globalement, le candidat qui a pensé à séparer en deux sommes arrive à faire quelque chose. Attention à la rigueur et à l'ordre des quantificateurs dans ce type de questions.