MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

(1) **a.** Rappeler la dérivée de la fonction *Arctan* et son ensemble de définition.

b. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\, \mathrm{d}v.$$

(2) Pour $a > 0$, on pose

$$J(a) = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a\sin^2(x)}\, \mathrm{d}x.$$

a. Justifier que $J(a)$ existe pour a fixé.

b. À l'aide de l'outil informatique, en utilisant la méthode des rectangles, donner une valeur approchée de $J(3)$.

c. Montrer que pour tout x réel

$$\frac{1}{1 + a\sin^2(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + (a+1)\tan^2(x)}.$$

d. À l'aide du changement de variable $u = \tan x$, montrer que

$$J(a) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + (a+1)u^2}\, \mathrm{d}u.$$

e. En déduire que $J(a) = \dfrac{C}{\sqrt{a+1}}$ où $C > 0$ est une constante à déterminer.
On pourra vérifier le résultat à l'aide du résultat de la question 2.(b).

(3) On pose $J_n = J(e^{n\pi})$.
Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 0} J_n$.

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$(H)\ \ 2xy' - 3y = 0 \qquad \text{et} \qquad (E)\ \ 2xy' - 3y = \sqrt{x}$$

(1) **a.** Justifier, sans les déterminer, que (H) admet des solutions sur $]0, +\infty[$.
b. Que doit-on rajouter comme donnée pour avoir une unique solution ?

(2) Dans cette question, on cherche à déterminer une valeur approchée de la solution y de (H) avec la condition initiale $y(1) = 1$ sur l'intervalle $[a, b] = [1, 2]$.
a. Expliquer la méthode d'Euler.
b. Écrire une fonction `euler` avec en paramètre n (permettant de fixer le pas $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{n}$) qui donne une approximation de la solution de l'équation (H). La fonction doit renvoyer deux listes : la liste X des x_k et la liste Y des $f(x_k)$. On pourra utiliser :

$$y_{k+1} = \left(\frac{3h}{2x_k} + 1\right) y_k$$

(3) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(4) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(5) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On considère la matrice réelle M suivante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) **a.** Calculer M^2.
b. Calculer M^3.

(2) Établir une relation entre M, M^2 et M^3.

(3) On considère le polynôme $P = X^3 - X^2 - 2X$. Déterminer les racines de P.

(4) **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Écrire la relation de division euclidienne de X^n par P, on notera R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par P. Le degré de R_n devra être précisé.
b. Évaluer l'expression précédente en 0, -1 et 2.

(5) Déduire de ce qui précède la valeur de M^n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

(6) On considère les suites réelles (a_n), (b_n) et (c_n) définies par $a_0 = b_0 = c_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + c_n \\ b_{n+1} = a_n \\ c_{n+1} = a_n \end{cases} .$$

a. Écrire une fonction en `Python` prenant en paramètre un entier n et renvoyant les valeurs a_n, b_n et c_n.
b. Donner une expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On dispose de deux boites A et B. Au départ, A contient deux jetons marqués 0 et B deux jetons marqués 1. On extrait au hasard et simultanément un jeton de A et un jeton de B et on les change de boites. On effectue cette manipulation n fois. Soit X_n la variable aléatoire égale à la somme des points des jetons contenus dans A à l'issue de ces n manipulations.

(1) Déterminer les valeurs possibles et la loi de X_1.

(2) Écrire une fonction en `Python` qui simule la répartition des jetons dans chaque boite au cours des n manipulations.
On pourra commencer par définir $A = [0, 0]$ et $B = [1, 1]$. Pour avoir un nombre alétoire entier entre 3 et 9 bornes incluses en `Python` on pourra utiliser les commandes suivantes :

```python
import random
nombre_aleatoire_entre3_et_9=random.randint(3, 9)
```

Pour avoir un nombre alétoire réel entre 0 et 1 bornes exclus en `Python` on pourra utiliser les commandes suivantes :

```python
import random
nombre_aleatoire=random.random()
```

(3) **a.** Pour tout $i \in \{0; 1; 2\}$ et pour tout $j \in \{0; 1; 2\}$, calculer les 9 résultats $P_{(X_{n-1}=j)}(X_n = i)$ pour $n > 1$.

b. Exprimer la loi de X_n en fonction de celle de X_{n-1} pour $n > 1$ (on attend ici une formule et non une tableau).

(4) Soit C_n la matrice colonne donnant la loi de X_n, c'est-à-dire

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer une matrice A telle que $C_n = AC_{n-1}$ pour $n > 1$.

b. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.

c. Soit n un entier naturel non nul. À l'aide de la question précédente, déterminer A^n puis la loi de X_n en fonction de n .

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

On se place sur $\mathbb{R}_2[X]$, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels. On définit $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$, tel que :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$$

(1) Démontrer que φ est un produit scalaire.

(2) Écrire un script en langage `Python` pour calculer $\varphi(X^2 + 1, X^2 - 1)$.

(3) Calculer $\|X^2 - 5\|$.

(4) Déterminer une base orthormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.

(6) Calculer la distance de $X^2 + 1$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

MATHEMATIQUES

N.B. : la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, l'exercice s'intéresse à l'inversibilité de la matrice carrée d'ordre n :

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

On considérera également $\Delta_n(x) = \mathrm{Det}(M_n(x))$.

(1) **a.** Démontrer que $M_1(x)$ et $M_2(x)$ sont inversibles pour tout $x \in \mathbb{R}$
  b. À l'aide de l'outil informatique, comparer la fonction Δ_4 et la fonction $x \mapsto 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$.
  c. Émettre une conjecture sur la forme de $\Delta_n(x)$.

(2) Établir une relation de récurrence liant $\Delta_{n+2}(x)$, $\Delta_{n+1}(x)$ et $\Delta_n(x)$

(3) Démontrer le résultat conjecturé dans la question 1.

(4) Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_n(x)$ est-elle inversible ?

(5) Dans cette question on considère que $x \in \mathbb{C}$.
  a. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_1(x)$ n'est pas inversible ?
  b. Pour quelle(s) valeur(s) de x la matrice $M_2(x)$ n'est pas inversible ?
  c. Généraliser les résultats précédents pour déterminer pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{C}$ la matrice $M_n(x)$ est inversible.