

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI**

---

**MATHÉMATIQUES****Lundi 4 mai : 8 h - 12 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
  - *Ne pas utiliser de correcteur.*
  - *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*
- 

<b>Les calculatrices sont interdites</b>
--

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.**

# PROBLÈME 1

## Autour de la fonction sinus cardinal

### Objectifs

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

### Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour  $x > 0$ , on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

- Q1.** Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(t)| \leq t$ .
- Q2.** Montrer que les fonctions  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont bien définies sur  $]0, +\infty[$ .
- Q3.** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ .
- Q4.** Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  et exprimer  $F'$  à l'aide de la fonction  $G$ .
- Q5.** Trouver une expression simple pour  $G$  et pour  $H$ . *On pourra calculer  $H(x) + iG(x)$ .*  
En déduire, pour  $\alpha \in ]0, +\infty[$ , la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-t\alpha} \cos(\alpha t) dt$ .
- Q6.** En déduire une expression simple pour  $F$ . Que vaut  $F(1)$  ?

### Partie II - Autour de la formule de Viète

- Q7.** Montrer que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

- Q8.** Montrer que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

*On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :*

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

**Q9.** En déduire que pour tout  $t > 0$  :

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

**Q10.** Montrer que pour tout  $x > 0$  :

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}.$$

**Q11.** En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

**Q12.** Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

**Q13.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que pour tout  $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$  :

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}.$$

**Q14.** En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left( \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **Q11**.

## PROBLÈME 2

### Les matrices de Kac

#### Notations

- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels et  $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$  désigne l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  seront notés en colonnes.
- La lettre  $i$  désigne le nombre complexe usuel vérifiant  $i^2 = -1$ . On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

#### Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices  $A_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  et  $B_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  introduites par Mark Kac au milieu du XX<sup>e</sup> siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II** et **III**. La **Partie IV** est une utilisation probabiliste d'une des deux matrices de Kac.

### Partie I - La dimension 3

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Q15.** Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_A = \det(XI_3 - A)$  de  $A$  et le décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- Q16.** En déduire que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Donner la liste des valeurs propres de  $A$  et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de  $A$  dans cette question.*
- Q17.** Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi_B$  de  $B$  et le décomposer en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ . Vérifier que  $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$ .
- Q18.** La matrice  $B$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ ? Est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de  $B$  et la dimension des espaces propres sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de  $B$  dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C}).$$

- Q19.** Exprimer  $D^{-1}AD$  à l'aide de la matrice  $B$ .

Soit  $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ .

**Q20.** Calculer  $\Delta^{-1}A\Delta$ . En déduire à nouveau que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie II - Étude d'un endomorphisme

### Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice  $B_n$  et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel fixé. Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note  $V_n$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

**Q21.** Montrer que la famille  $(f_0, \dots, f_n)$  est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe  $V_n$ .

**Q22.** Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , montrer que  $f'_k \in V_n$ . En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de  $V_n$  et que sa matrice  $B_n$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$ .

**Q23.** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$ .

**Q24.** En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que :  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_k \in V_n$ .

**Q25.** Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , calculer  $g'_k$ . En déduire que  $\varphi_n$  est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de  $\varphi_n$  et décrire les espaces propres correspondants.

**Q26.** Pour quelles valeurs de  $n$  l'endomorphisme  $\varphi_n$  est-il un automorphisme de  $V_n$  ?

**Q27.** Écrire la décomposition de  $g_n$  dans la base  $(f_0, \dots, f_n)$  et en déduire que :

$$\text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$ .

### Partie III - Les matrices de Kac de taille $n + 1$

#### Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice  $A_n$ . On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice  $A_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel fixé. On note  $A_n$  la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général  $a_{kl}$  de la matrice  $A_n$  vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$  si  $1 \leq k \leq n$ ,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$  si  $2 \leq k \leq n + 1$ ,
- $a_{kl} = 0$  pour tous les couples  $(k, l) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$  non couverts par les formules précédentes.

On note enfin  $D_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$  la matrice diagonale dont le  $k$ -ième terme diagonal  $d_{kk}$  vérifie  $d_{kk} = i^{k-1}$ .

**Q28.** Soient  $M = (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice de taille  $p$  et  $D = (d_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$  une matrice diagonale de taille  $p$ . Exprimer le terme général de la matrice  $DM$  en fonction des  $m_{kl}$  et des  $d_{kl}$ , puis exprimer le terme général de la matrice  $MD$  en fonction des  $m_{kl}$  et des  $d_{kl}$ .

**Q29.** Montrer que  $D_n^{-1} A_n D_n = -i B_n$  où  $B_n$  est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre  $\chi_{A_n}(X)$  et  $\chi_{B_n}(iX)$ , où  $\chi_{A_n}$  et  $\chi_{B_n}$  sont les polynômes caractéristiques respectifs de  $A_n$  et  $B_n$ .

**Q30.** En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que  $A_n$  est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ , que les valeurs propres de  $A_n$  sont les entiers de la forme  $2k - n$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et que :

$$\text{Ker}(A_n - n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $p_k = \binom{n}{k}$ .

## Partie IV - Un peu de probabilités

### Objectifs

Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice  $A_n$ . Seul le résultat de la question **Q30** est utilisé, cette partie peut être traitée en admettant si besoin ce résultat.

Étant donné un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , on dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contenant à elles deux  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On note  $N_0$  la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne  $U_1$ .

À chaque instant entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , on choisit un des  $n$  numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $N_k$  la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne  $U_1$  après l'échange effectué à l'instant  $k$ .

Exemple : supposons  $n = 4$  et qu'à l'instant 0, l'urne  $U_1$  contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne  $U_2$  la boule 2. On a dans ce cas  $N_0 = 3$ .

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de  $U_1$  et on la place dans  $U_2$ . On a alors  $N_1 = 2$ .
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de  $U_2$  et on la place dans  $U_1$ . On a alors  $N_1 = 4$ .

Pour  $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $E_{k,l}$  l'événement  $(N_k = l)$  et  $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$  sa probabilité.

On note enfin  $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$  le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire  $N_k$ .

**Q31.** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , que peut-on dire de la famille  $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$  ?

**Q32.** Si l'urne  $U_1$  contient  $j$  boules à l'instant  $k$ , combien peut-elle en contenir à l'instant  $k + 1$  ?

**Q33.** Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $j, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas  $j = 0$  et  $j = n$ .

**Q34.** Démontrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

**Q35.** En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

où  $A_n$  est la matrice introduite dans la **Partie III**.

On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les  $n$  boules dans l'une des urnes  $U_1$  ou  $U_2$ .

**Q36.** Déterminer la loi  $\pi$  de  $N_0$ .

**Q37.** Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N_k$  a la même loi que  $N_0$ . *On pourra utiliser la question Q30 de la Partie III.*

**Q38.** Démontrer que  $\pi$  est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si  $N_0$  suit la loi  $\pi$ , alors toutes les variables  $N_k$  suivent la loi  $\pi$ .

**FIN**