PC

CONCOURS COMMUN INP

RAPPORT DE L'ÉPREUVE ÉCRITE DE MATHÉMATIQUES

1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Le sujet était composé de trois exercices totalement indépendants. Le premier exercice était centré sur un calcul de l'intégrale de Dirichlet en utilisant une intégrale à paramètre. Le second exercice permettait d'établir un lien entre les extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$ et les valeurs propres d'une matrice symétrique associée à cette forme quadratique. Le troisième exercice concernait l'étude du temps de retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$.

Le sujet avait pour objectif d'évaluer les candidats sur une vaste partie du programme des deux années de classe préparatoire ainsi que sur les six grandes compétences exposées dans le programme de la filière PC. L'indépendance des trois exercices avait pour but de permettre aux candidats de commencer le sujet avec les thèmes du programme qu'ils maîtrisaient le mieux, puis de pouvoir passer facilement à un autre exercice en cas de difficulté. Le sujet était d'une longueur raisonnable afin de donner une réelle possibilité au candidat de traiter l'ensemble des questions.

La dernière question du sujet aurait pu gagner en clarté si elle avait été formulée différemment : pour les candidats ayant abordé cette question, il a été tenu compte de cette difficulté dans la notation.

2/ COMMENTAIRES GÉNÉRAUX SUR LES COPIES

L'objectif d'une épreuve de mathématiques ne se résume pas à évaluer les capacités calculatoires des candidats. Ces derniers doivent également prêter attention à la présentation de leurs raisonnements avec une rédaction précise. Lorsqu'un candidat souhaite utiliser un résultat du cours, il se doit de citer et de vérifier soigneusement ses hypothèses. De plus, il est important de choisir une présentation claire (avec une liste numérotée par exemple) pour les théorèmes comportant de nombreuses hypothèses à vérifier (comme le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre par exemple).
De même, si un candidat souhaite utiliser le résultat d'une question précédente, il se doit de l'indiquer en citant le numéro de la question.

Les candidats doivent faire attention à rester dans le cadre du programme officiel de mathématiques de la filière PC. Par exemple, la notion de compacité ou la règle de d'Alembert pour les séries entières sont utilisées par certains candidats, alors que ces deux notions ne sont pas au programme. De même, l'espace vectoriel L^1 ou les coefficients binomiaux généralisés n'en font pas partie.

Nous avons constaté qu'une partie non négligeable des candidats ne lisait pas les questions assez consciencieusement : il arrive souvent qu'ils oublient de répondre à une partie de la question.

L'ensemble des correcteurs souhaite rappeler que la présentation et le soin de la copie contribuent à son évaluation. Certains candidats n'ont pas respecté la consigne d'utiliser un stylo de couleur suffisamment foncée, ce qui rend la lecture de leur copie très difficile. De plus, l'interdiction d'utiliser un effaceur n'empêche pas les candidats de raturer proprement. Nous encourageons également les candidats à aérer leur copie, à ne pas utiliser d'abréviation et à mettre en valeur leurs résultats afin d'en faciliter la lecture.

L'exercice 1 a été traité de manière satisfaisante par une part importante des candidats. Ce grand classique a donné l'occasion aux étudiants sérieux de se mettre en valeur en appliquant directement des résultats et des méthodes du cours dans de nombreuses questions.

A contrario, les notes des candidats à l'exercice 2 sont relativement faibles. La raison principale est qu'une majorité de candidats semble avoir considéré qu'il n'était pas nécessaire de connaître les résultats et les méthodes élémentaires du cours sur les fonctions de plusieurs variables. De plus, il est très inquiétant de constater que peu de candidats sont capables de déterminer rigoureusement le minimum et le maximum de la fonction d'une variable introduite dans la question 12.

Finalement, l'exercice 3 est globalement bien réussi par les candidats, à l'exception des deux dernières questions qui étaient plus difficiles.

Pour terminer, voici quelques remarques générales sur des erreurs récurrentes :

- le théorème d'intégration par parties permet de montrer que deux intégrales sont de même nature, mais il ne permet pas d'écrire une égalité tant que l'on ne s'est pas assuré de la convergence d'une des deux intégrales en jeu ;
- les candidats doivent faire attention à la manipulation des inégalités. Les correcteurs ont observé beaucoup d'erreurs, notamment lorsque les expressions comportaient des fonctions trigonométriques ou des valeurs absolues ;
- dans les théorèmes sur les intégrales à paramètre, la fonction dominante ne doit dépendre que de la variable d'intégration (et pas du paramètre) ;
- il n'est pas suffisant de majorer une fonction pour en déduire qu'elle admet un maximum ;
- attention à ne pas confondre un évènement avec sa probabilité ;
- la somme d'une suite de probabilité (p_n) n'est pas égale à 1 en général.

3/ REMARQUES DÉTAILLÉES PAR QUESTION

Exercice 1 (Calcul de l'intégrale de Dirichlet) :

Q1 - Il s'agit de la première question de l'exercice : les candidats doivent être très soigneux dans la rédaction de leur solution. Une majorité de candidats oublie de préciser que la fonction f est continue par rapport à la variable t sur l'intervalle ouvert d'intégration.

Q2 - Pour utiliser le théorème d'intégration par parties, il est nécessaire de commencer par vérifier ses hypothèses (régularité des fonctions considérées et limites de leur produit). De plus, l'application du théorème ne permet pas d'écrire directement une égalité entre deux intégrales, mais d'assurer qu'elles sont de même nature. De nombreux candidats rédigent maladroitement le calcul des limites en mélangeant l'utilisation des développements limités et des équivalents.

Q3 - Peu de candidats pensent à justifier que la fonction est dérivable. La notation u'(x,t) n'est pas claire : il faut utiliser une notation usuelle pour une dérivée partielle.

Q4 - Pour déduire la limite à partir de l'inégalité, il faut justifier un minimum, en citant par exemple le théorème d'encadrement.

Q5 - Il faut être précis sur les quantificateurs dans les différentes hypothèses du théorème de dérivation. Nous rappelons que la fonction dominante ne doit pas dépendre du paramètre.

Q6 - Certains candidats ont calculé directement F'(x) sans utiliser le résultat de la question 3. On ne peut pas utiliser la valeur de F en 0 pour déterminer l'expression explicite de F(x). De même, on ne peut pas choisir arbitrairement la valeur de la constante comme le suggère certains candidats.

Q7 - Question globalement bien traitée. Le problème le plus fréquent est une erreur dans l'hypothèse de domination.

Q8 - Pour l'intégrabilité, de nombreux candidats ont donné un argument qui n'était pas valable dans le cas où $x = 0$. Certains candidats n'utilisent pas l'inégalité triangulaire mais majorent dans les valeurs absolues, ce qui n'est pas correct en général.

Q9 - Peu de candidats ont réussi à dominer correctement la fonction.

Q10 - Pour en déduire la valeur de $F(0)$, il ne suffit pas d'évaluer en 0 : il faut utiliser la limite de la fonction F en 0^+.

Exercice 2 (Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée) :

Q11 - Une majorité de candidats ne connaît pas son cours. Beaucoup se contentent de montrer que la fonction f est bornée, ce qui n'est pas suffisant. Pour justifier que f est continue, on peut invoquer son caractère polynomial.

Q12 - Très peu de candidats ont été capables de déterminer rigoureusement le minimum et le maximum de l'application. En général, il ne suffit pas d'étudier les valeurs de la fonction aux points où la dérivée s'annule.

Q13 - Il n'est pas suffisant d'indiquer que f est de classe C^1 par rapport à chacune de ses variables pour en déduire qu'elle est de classe C^1**.** Peu de candidats se souvenaient de la définition d'un point critique.

Q14 - Très peu de candidat ont réussi correctement cette question, bien que la méthode de résolution figure explicitement au programme.

Q15 - Une part non négligeable de candidat n'a pas réussi à écrire la matrice M_f à cause d'une mauvaise compréhension de l'énoncé.

Q16 - Comme il était difficile de rédiger une solution propre à cette question, les correcteurs ont valorisé les tentatives sérieuses de résolution.

Q17 - Il est fondamental de préciser que la matrice est à coefficients réels pour utiliser le théorème spectral.

Q18 - Question globalement bien traitée.

Q19 - Beaucoup de candidats n'ont pas pensé à calculer explicitement la quantité Y^TDY pour pouvoir l'encadrer.

Q20 - Il ne suffit pas d'indiquer que f atteint ses bornes pour déduire le résultat à partir de la question précédente.

Q21 - Question peu abordée sérieusement.

Q22 - Les rares candidats qui ont abordé cette question l'ont globalement bien traitée.

Exercice 3 (Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur Z) :

Q23 - Question globalement bien traitée. Cependant, certains candidats ont utilisé des expressions maladroites comme « distance parcourue ».

Q24 - La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités. Cependant, une part importante n'a pas mené rigoureusement le calcul de p_2 en utilisant notamment l'indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2.

Q25 - Question globalement bien traitée, même si certains candidats ont eu des difficultés à rédiger leur solution.

Q26 - Certains candidats semblent penser que X_k suit une loi de Bernoulli, ce qui n'est pas le cas. Il ne faut pas oublier de justifier que Y_k ne prend que les valeurs 0 et 1.

Q27 - Attention à ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance mutuelle pour les variables aléatoires $Y_1,...,Y_n$. Certains candidats ont exprimé Z_n en fonction de S_n, ce qui ne répondait pas à la seconde partie de la question (qui demandait d'exprimer S_n en fonction de Z_n).

Q28 - Question globalement bien traitée.

Q29 - Certains candidats essayent d'appliquer la règle de d'Alembert pour les séries entières : cette dernière n'étant pas au programme, elle ne peut pas rapporter de points. De plus, lorsque l'on utilise la règle de d'Alembert pour les séries numériques, il ne faut pas s'arrêter après avoir calculé la limite du quotient : il faut ajouter une phrase de conclusion pour faire le lien avec le rayon de convergence. Finalement, de nombreux candidats ont indiqué que la somme des p_n est égale à 1, ce qui est faux.

Q30 - Question globalement bien traitée.

Q31 - Question globalement bien traitée.

Q32 - La plupart des candidats a donné les bonnes probabilités, mais leur justification manque souvent de rigueur.

Q33 - La plupart des candidats pense à majorer le terme général de la série par q_n. Cependant, il ne suffit pas d'indiquer que q_n est une probabilité pour justifier que la série de terme général q_n est convergente. De plus, une partie des candidats a utilisé le fait que la somme des q_n est égale à 1, ce que l'on ne peut pas savoir à ce stade de l'exercice.

Q34 - Pour appliquer le théorème relatif au produit de Cauchy, il faut commencer par vérifier ses hypothèses. Beaucoup de candidats ont eu des difficultés à gérer le terme d'indice 0 dans la somme.

Q35 - Il est surprenant que certains candidats déterminent une expression de g(x) sans avoir trouvé l'expression de f(x) auparavant. Les correcteurs ont observé de nombreuses erreurs de signes dans le développement en série entière de la fonction g.

Q36 - Certains candidats utilisent l'expression « par identification » qui n'est pas satisfaisante : il est préférable de citer l'unicité du développement en série entière. De plus, il faut ensuite faire attention à distinguer les indices pairs et les indices impairs.

Q37 - Les rares candidats qui ont abordé cette question ont trouvé la bonne valeur pour la probabilité avec un raisonnement erroné, mais ils ont correctement interprété le résultat.

Q38 - Question très peu abordée.