Les calculatrices ***sont autorisées****.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Autour de l'intégrale de Gauss

Dans ce problème, on propose deux méthodes de calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis on compare deux approximations de :

$$\int_0^{1} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Les quatre sections de ce problème sont **indépendantes** mais dans **tout** le problème, f désignera la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$.

I. Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une intégrale à paramètre

Soient F et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée.
2. Justifier que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée.
3. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g'(x) = -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

4. En déduire que la fonction $\phi = g + F^2$ est constante, préciser sa valeur.
5. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\quad 0 \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
6. En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$. On note $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ cette limite.

II. Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une intégrale double

Pour tout réel $X > 0$, on note :

$$D_X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant X^2\}.$$

On pose aussi :

$$I(X) = \iint_{D_X} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad J(X) = \iint_{[0,X]^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ .$$

7. Représenter graphiquement les trois parties suivantes de $\mathbb{R}^2$: $[0,X]^2$, D_X et $D_{X\sqrt{2}}$.
   Comparer ainsi les intégrales $J(X), I(X)$ et $I(X\sqrt{2})$.
8. Démontrer à l'aide des coordonnées polaires que $I(X) = \dfrac{\pi}{4}(1 - \mathrm{e}^{-X^2})$.
9. En déduire la limite de $J(X)$ lorsque X tend vers $+\infty$.
10. Exprimer $J(X)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^X \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

    Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

III. Approximation de $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ par la somme d'une série

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

11. Démontrer que la fonction f est développable en série entière (on déterminera la série entière et on précisera son rayon de convergence).

12. En déduire avec soin que :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|s_n - I| \leqslant \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

14. En déduire un entier N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, on a $|s_n - I| \leqslant 10^{-6}$.

IV. Approximation de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ par la méthode des rectangles

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

15. Démontrer que pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x - y|$.
16. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|R_n(f) - I| \leqslant \frac{1}{n}.$$

    On pourra majorer l'expression $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right) \mathrm{d}t\right|$.
17. En déduire un entier N_2 tel que pour $n \geqslant N_2$, on a $|R_n(f) - I| \leqslant 10^{-6}$. Comparer avec le résultat de la partie précédente.

Fin de l'énoncé