

## CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

## MATHEMATIQUES

## PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont **autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Ce sujet est constitué d'un problème et d'un exercice **indépendants**.

**Problème :** Utilisation des séries de Grégory pour l'approximation de  $\pi$

Le problème propose l'étude de deux approximations de  $\pi$ . Toutes deux utilisent des séries de Grégory définies dans la partie I.

Les parties II, III, IV peuvent être traitées de manière indépendante.

**I. séries de Grégory**

Pour tout réel  $a$  de  $]0;1]$ , on définit la série de Grégory de paramètre  $a$  par :  $G_a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$ .

**1. Convergence de la série  $G_a$** 

**a.** Montrer que la série  $G_1$  est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Justifier votre réponse.

**b.** Montrer que pour  $a \in ]0;1[$ , la série  $G_a$  est absolument convergente.

On notera, dans la suite,  $G(a)$  la somme de la série  $G_a$ , c'est-à-dire  $G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^n}{2n+1}$ .

**2. Soit  $a \in ]0;1]$ .**

**a.** Etudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{a^n}{2n+1}$ .

b. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $G_{n,a}$  la somme partielle de la série  $G_a$ , c'est-à-dire

$$G_{n,a} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{a^k}{2k+1}. \text{ Justifier que } \forall n \in \mathbb{N}, |G(a) - G_{n,a}| \leq \frac{a^{n+1}}{2n+3}.$$

## II. Une première approximation de $\pi$ à l'aide d'une série de Grégory

On définit l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$  périodique, impaire, par

$$\begin{cases} \forall t \in ]0; \pi[, f(t) = 1 \\ f(0) = 0. \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

3. Représenter graphiquement  $f$  puis calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f$ .
4. Justifier que  $f$  est développable en série de Fourier, en déduire la formule  $\pi = 4G(1)$ .

La suite  $(4G_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers  $\pi$  et ainsi fournit une approximation de  $\pi$ .

### 5. Précision de l'approximation

Justifier que  $\forall n \in \mathbb{N}, |\pi - 4G_{n,1}| \leq \frac{4}{2n+3}$  puis déterminer un entier  $N_1$  pour lequel  $\forall n \geq N_1, |\pi - 4G_{n,1}| \leq 10^{-6}$ .

Interpréter cette dernière inégalité : écrire une phrase en utilisant les termes « itérations » et « décimales exactes ».

## III. Expression de la fonction arctangente à l'aide de séries de Grégory

6. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  puis déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

7. Justifier que pour  $x \in ]-1; 1[$ ,  $\text{Arctan } x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ .

En déduire une expression de  $\text{Arctan } a$  à l'aide d'une série de Grégory lorsque  $a \in ]0; 1[$ .

## IV. Formule de John Machin

Pour toute cette partie, on pourra utiliser la formule suivante de trigonométrie :

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}.$$

8. Calculer  $\tan\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$  puis  $\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ . On donnera les résultats sous forme de rationnels.
9. En déduire la formule de Machin 
$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$
 On pourra calculer  $\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$ .

### V. Application de la formule de Machin pour approximer $\pi$

10. Expression de  $\pi$  comme combinaison linéaire de 2 séries de Grégory  
Déterminer 4 réels strictement positifs  $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$  tels que  $\pi = \lambda_1 G(a_1) - \lambda_2 G(a_2)$ .
11. Précision de l'approximation
- Déterminer un entier  $K$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}) \right| \leq \frac{K}{25^{n+1}}$ .
  - Trouver un entier  $N_2$  pour lequel  $\forall n \geq N_2, \left| \pi - (\lambda_1 G_{n,a_1} - \lambda_2 G_{n,a_2}) \right| \leq 10^{-6}$ .  
Comparer la précision de cette approximation avec celle de la partie II.

#### Remarques :

- Cette méthode d'approximation de  $\pi$  utilisée par John Machin (1680- 1752) permit à ce dernier de calculer « à la main » 100 décimales exactes de  $\pi$  en 1706.
- Les approximations de  $\pi$  à l'aide de séries de Grégory permirent d'obtenir à l'aide d'ordinateurs un million de décimales en 1974. (J. Guilloud et M. Bouyer)
- Aujourd'hui, les mathématiciens ont trouvé d'autres types de techniques encore plus performantes, qui leur permettent de calculer plusieurs milliards de décimales.

### Exercice : Quelques propriétés de l'ensemble des matrices orthogonales

Dans cet exercice,  $n$  est un entier naturel non nul et on note :

$M_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$  - espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ .

Pour une matrice  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$ ,  ${}^t A$  est sa matrice transposée et  $\operatorname{Tr}(A)$  sa trace.

$I_n$  la matrice unité de  $M_n(\mathbb{R})$ .

$O_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales de  $M_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire des matrices  $M$  vérifiant :  
 ${}^t M M = I_n$ .

### Un produit scalaire sur l'espace des matrices réelles

Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de  $M_n(\mathbb{R})$ , on pose  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^t AB)$ .

12. Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Exprimer  $\text{Tr}({}^t AA)$  en fonction des coefficients de  $A$ .

13. Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : pour  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  
 $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$ .

### Ensemble des matrices orthogonales

14. Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , quelle(s) valeur(s) peut prendre le déterminant de  $A$  ?

$O_n(\mathbb{R})$  est-il un espace vectoriel ?

15.  $O_n(\mathbb{R})$  est-il une partie bornée de  $M_n(\mathbb{R})$  pour la norme de Schur ? Répondre à la même question, pour une norme quelconque sur  $M_n(\mathbb{R})$ .

- Fin de l'énoncé -