

Mathématiques

Monsieur DE SAINT JULIEN Arnaud

1 Présentation du sujet

Le concours comportait deux épreuves de mathématiques indépendantes, de deux heures chacune, appelées «partie I» et «partie II». La première partie était traitée par les candidats des concours Mathématiques, Physique et Chimie et la seconde uniquement par les candidats de Mathématiques et Physique.

La première épreuve comportait trois exercices indépendants qui portaient sur des connaissances fondamentales :

- l'étude de la diagonalisation d'une famille de matrices
- l'étude de la convergence d'une série obtenue comme un produit de Cauchy
- un vrai-faux constitué de six questions portant sur de l'algèbre et de l'analyse.

La seconde épreuve était un problème où l'on étudiait la série de Fourier d'une fonction 2π -périodique qui ne vérifiait pas les hypothèses du théorème de Dirichlet.

2 Appréciation générale des copies

L'ensemble est très hétérogène, tout comme la palette de notes mais reste en moyenne décevant. Il y a trop de copies catastrophiques, qui dénotent soit une non préparation au concours, soit tout simplement un niveau mathématique vraiment insuffisant. Voici quelques constatations des correcteurs :

- Le cours n'est pas suffisamment su ou assimilé.
- Il y a un manque de rigueur important.
- On déplore un nombre non négligeable de copies «brouillons» avec fautes d'orthographe et de grammaire.
- Le vrai-faux, entre autre, a montré que la réflexion était insuffisante. Trop de candidats «tentent» des solutions pas assez réfléchies, en se disant «on verra bien »... Je rappelle qu'écrire des énormités fait très mauvais effet sur une copie. C'est un concours pour recruter de futurs ingénieurs.

Pour conclure, le sujet a pu jouer son rôle pour le concours, et a permis de bien départager les candidats.

3 Compétences mises en jeu

3.1 Partie I

3.1.1 Exercice 1

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable : le polynôme caractéristique est scindé et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres.

À noter que certains candidats confondent matrice inversible et matrice diagonalisable.

3.1.2 Exercice 2

1. Le lien suite série, comparaison à une série de Riemann par recherche d'équivalent.
2. Critère spécial des séries alternées.
3. Divergence grossière d'une série.
4. Étude de suite.

3.1.3 Exercice 3

1. Le théorème de Rolle.
2. Utilisation des suites pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite.
3. Suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Attention, f croissante implique (u_n) monotone mais pas forcément croissante.
4. Se souvenir que 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible donc pas de rang maximal.
5. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
6. Une matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable.

3.2 Partie II

3.2.1 Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. Série de Riemann et tracé d'une fonction périodique.
2. Le théorème fondamental de l'analyse : si f est continue sur I et $a \in I$, l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur I et $F' = f$.
3. Convergence d'une intégrale par comparaison à une intégrale de Riemann.
4. Une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et de limite finie en $+\infty$ est bornée.
5. Comparaison série intégrale.

3.2.2 Étude d'une fonction 2π -périodique

6. Étude d'une fonction 2π -périodique : tracé, non dérivabilité en un point, caractère C^1 .
7. Calcul des coefficients de Fourier.
8. La parité et la 2π -périodicité passent à la limite simple.
9. Convergence normale d'une série de fonctions.
10. La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
11. Intégration terme à terme **sur un segment** d'une série de fonctions qui converge uniformément.

3.2.3 Conclusion

12. Linéarité des coefficients de Fourier.
13. Produit scalaire sur l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques.
14. Théorème de Parseval.
15. Attention, si f est positive et que $\int_I f = 0$, alors f n'est pas forcément nulle sur I (il manque la continuité).
16. Conclusion.