

## Présentation générale du sujet

Le concours comportait deux épreuves de mathématiques indépendantes, de deux heures chacune, appelées « partie I » et « partie II ». La première partie était traitée par les candidats des concours Physique et Chimie et la seconde uniquement par les candidats de Physique.

**La première épreuve** comportait trois exercices indépendants qui n'étaient pas difficiles et portaient sur des connaissances fondamentales :

- L'étude d'une suite récurrente (on établit d'ailleurs le théorème de Cesàro, que l'on applique pour obtenir un équivalent).
- L'étude d'un endomorphisme sur l'espace des polynômes (on détermine le noyau, l'image, on écrit sa matrice en taille 3 que l'on réduit, on exhibe une famille libre de vecteurs propres pour diagonaliser).
- La résolution d'une équation différentielle (d'ordre un avec second membre, on étudie ensuite les raccords).

Cette épreuve était de longueur raisonnable.

**La seconde épreuve** était un problème où l'on étudiait la fonction Gamma ainsi que la fonction  $\Psi$  d'Euler, en vue d'établir la formule suivante 
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}.$$

Dans la première partie, on établit des généralités sur  $\Gamma$ , notamment sa dérivabilité.

Les deuxièmes et troisièmes parties sont indépendantes.

Dans la deuxième partie, on étudie la fonction  $\Psi$  et on établit la formule citée au-dessus.

La troisième et dernière partie est consacrée à l'étude des variations et des limites de Gamma, le graphe est demandé...

Les connaissances mises en jeu étaient les suivantes :

- intégration (comparaison aux séries de Riemann, théorème de dérivation de Leibnitz...),
- analyse réelle (variations, équivalents, « traduction avec quantificateurs » d'une limite, théorème de Rolle, ...),
- une série de Riemann et une décomposition en éléments simples,
- l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le texte était clair et précis, la difficulté progressive.

Là encore, la longueur de l'épreuve était raisonnable.

## Appréciation générale des copies

Commençons par des statistiques (les moyennes sont sur 20).

moyenne / écart type	Candidats Chimie	Candidats Physique
<b>Partie I</b>	8,65 / 3,99	10,60 / 3,96
<b>Partie II</b>		9,01 / 3,95

L'ensemble est très hétérogène, tout comme la palette de notes. Le nombre de candidats sérieux ayant obtenu de bonnes ou très bonnes notes a augmenté. Du coup, les résultats sont globalement un peu meilleurs que l'an dernier ; mais cet ensemble reste encore décevant. Il y a trop de copies catastrophiques, qui dénotent soit une non préparation au concours (candidat « touriste »), soit tout simplement un niveau mathématique vraiment insuffisant.

Le sujet a donc joué son rôle pour le concours national DEUG, et a permis de bien départager les candidats.

*Constatations des correcteurs :*

- On déplore un nombre non négligeable de copies assimilables à des « brouillons » avec fautes d'orthographe et de grammaire.
- Le cours **n'est pas su** : énoncé des théorèmes de convergence pour les séries de Fourier, définition d'un produit scalaire, séries alternées...
- La **réflexion doit être plus importante**. Trop de candidats « tentent » des solutions pas assez réfléchies, en se disant « on verra bien »...

## Remarques détaillées par question

### Partie I

#### Exercice I

**1.a** Certains écrivent  $f(I) < I$  au lieu de  $f(I) \subset I$ .

**1.b** Attention,  $f$  croissante implique  $(u_n)$  monotone et pas forcément croissante.

Beaucoup de candidats ont oublié de justifier que  $u_n > 0$  pour le signe de  $u_{n+1} - u_n$ .

**1.c** Souvent correct même si on justifie rarement que  $f$  est continue pour conclure que  $(u_n)$  converge vers un point fixe de  $f$ .

**2.a** Seulement un tiers des candidats environ connaît la définition de limite !

**2.b 2.c** Rarement bien traitée.

**3.a** Peu de candidats ont trouvé la limite (pourtant faisable au lycée) !

**3.b** Du coup, peu de candidats ont trouvé le bon équivalent.

#### Exercice II

**4.a** Pas mal d'erreurs dans le calcul des images.

**4.b** Rarement bien justifié.

**4.c** Très peu de réponse correcte.

**5.** La définition d'endomorphisme est assez souvent méconnue ! La linéarité est souvent prouvée, mais on oublie de vérifier que l'espace d'arrivée est le même que l'espace de départ.

**6.** Le théorème du rang est connu.

- 7.a** Des erreurs dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Souvent juste si la question **4.a** l'était.
- 7.b** La plupart de ceux qui avaient la matrice juste trouve le bon polynôme caractéristique. Même s'ils trouvent 3 valeurs propres distinctes, ils se lancent dans le calcul des espaces propres ce qui est inutile ici.  
A noter 2 erreurs :  
-  $A$  n'est pas diagonalisable car son déterminant vaut 0  
-  $A$  n'est pas diagonalisable car  $A$  n'est pas symétrique.
- 8.a** Le candidat pense en général à montrer que c'est une famille libre, mais pas mal de réponses « au bleuf ».
- 8.b** Quelques candidats ont répondu correctement.

### Exercice III

- 9.a** Correct dans l'ensemble.
- 9.b** La condition de continuité a parfois été réussie, celle sur la dérivabilité plus délicate, très rarement.

## Partie II

### Problème

- 1.a** Pas de problème en général mais quelques horreurs.
- 1.b** Beaucoup de réponses fausses alors que c'est du cours et que surtout, on doit savoir retrouver le résultat. Cette petite question permet tout de suite de déceler les énormes difficultés des candidats en calcul intégral.
- 2.** Justification correcte de l'inégalité pour un quart des copies environ. La convergence de l'intégrale est rarement traitée correctement.
- 3.** Correct dans l'ensemble.
- 4.a** Des erreurs dans la dérivée de  $t \mapsto t^{x-1}$ , en confondant  $x$  et  $t$ .
- 4.b** Très rarement réussie.
- 6.a** Réussie dans l'ensemble, même si les justifications ne sont pas toujours rigoureuses.
- 6.b** Réussie lorsqu'elle est traitée.
- 7.** Assez réussie.
- 8.** L'inégalité de Cauchy-Schwarz a eu peu de succès, tout comme l'inégalité. Toutefois, certains ont montré la croissance en admettant l'inégalité.
- 9.** Réussie par quelques candidats.
- 10.11.12.** Pas souvent réussie. Ceux qui ont réussi, ont en général bien traité tout le problème. Pas mal de réponses peu réfléchies, en contradiction avec les précédentes.  
A noter confusion entre théorème de Rolle et théorème des accroissements finis.