

## Présentation générale du sujet

Le concours comportait deux épreuves de mathématiques indépendantes, de deux heures chacune, appelées « partie I » et « partie II ». La première partie était traitée par les candidats des concours Physique et Chimie et la seconde uniquement par les candidats de Physique.

La première épreuve comportait trois exercices indépendants : un développement asymptotique de la série harmonique, l'étude des endomorphismes dont l'image est égale au noyau et enfin la règle de Raabe-Duhamel pour les séries numériques.

Les deux premiers exercices n'étaient pas difficiles et portaient sur des connaissances fondamentales : comparaison série-intégrale, suites adjacentes, constante d'Euler et algèbre linéaire de première année. Le troisième exercice ne nécessitait que des connaissances élémentaires sur les séries, mais demandait un peu plus de réflexion.

Cette épreuve était de longueur très raisonnable.

La seconde épreuve était un problème qui traitait des polynômes de Bernoulli (étudiés dans le paragraphe I) et de leur utilisation pour calculer la valeur des  $\zeta(2k)$  (paragraphe II) ainsi que

les sommes  $\sum_{k=1}^n k^p$  (paragraphe III).

Les thèmes mis en jeu étaient les suivants : polynômes, série de Fourier, intégration (calcul), algèbre linéaire...

Le texte était clair et précis, de difficulté moyenne mais un peu long pour une épreuve de deux heures. On peut toutefois noter que les paragraphes II et III étaient indépendants.

## Appréciation générale des copies

Les résultats sont très décevants par rapport au sujet proposé notamment pour la partie I qui proposait deux exercices peu difficiles.

*Le cours est souvent mal maîtrisé, voire non su.* Précisément, les notions suivantes ont posé des problèmes à bon nombre de candidats : définition avec epsilon de suite convergente, définition d'équivalent, de négligeable, hypothèses pour développer en série de Fourier une fonction mais aussi l'algèbre linéaire.

Il est clair que pour la majorité des candidats, les concepts mathématiques ne sont pas vraiment assimilés et que les candidats connaissent plutôt des « techniques » ou « recettes de cuisine » qu'ils essaient de reproduire.

Aussi, *un grand manque de rigueur a été constaté.* Ceci est vrai dans la façon de rédiger, mais elle traduit certainement aussi des *difficultés dans la réflexion* qui est régulièrement insuffisante, plus précisément pas assez « structurée », avec un manque d'automatismes. Cela se voit bien en algèbre linéaire.

Terminons par une constatation des correcteurs : *les copies provenant d'un même centre d'examen sont assez homogènes*, mais les différences entre centre d'examen sont parfois très importantes. Ceci amène à penser que les préparations à ce concours sont très variables d'un centre à l'autre.

Enfin, rappelons qu'il est recommandé aux candidats de bien lire le programme officiel du concours.

## Remarques détaillées par question

### – Partie I –

#### Exercice I

- a) Question très facile, beaucoup de preuves farfelues.

b) Assez réussie.  
La définition d'équivalent ne semble pas connue, trop de candidats n'ont pas le réflexe de montrer que  $\lim \frac{H_n}{\ln n} = 1$ .
- a) La définition avec « epsilon » de suite convergente n'est pas toujours connue.

b) Une erreur courante était de dire que la suite  $(v_n)$  était majorée car « majorée par  $w_n$  » au lieu de la majorer par une constante indépendante de  $n$ .

c) L'argument « une suite croissante majorée converge » a, en général, été évoqué.
- a) La réponse découlait directement de la question 1.a). Certains candidats ont perdu beaucoup de temps à refaire une preuve (qui d'ailleurs était souvent incomplète).

b) Il fallait montrer que les suites étaient adjacentes.

c) La notation «  $o(1)$  » est souvent non comprise.

#### Exercice II

1. ,2. ,3. En général bien traitées.
- a) En général bien traitée.

b) Erreur fréquente : « l'image d'une base est une base ».  
Beaucoup de candidats ont tenté sans succès de montrer directement que la famille était libre.
5. Les candidats ont souvent déterminé le noyau en résolvant le système  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ . Les réponses étaient alors très longues. Il était plus astucieux de déterminer le rang et des relations de dépendance entre les vecteurs colonnes.
6. Il suffisait d'invoquer le résultat des questions précédentes. Beaucoup de candidats ne l'ont pas vu et ont calculé le polynôme caractéristique qui était scindé et ont conclu (pas tous) que la matrice était trigonalisable.
7. Question pas facile, très peu traitée.

### **Exercice III**

1. Question pas facile. Pour les candidats qui ont traité la question, énormément d'horreurs avec notamment une réciproque imaginaire du critère de d'Alembert.
2. Question rarement bien traitée, là aussi la notion de «  $o\left(\frac{1}{n}\right)$  » n'est pas toujours assimilée.
3. Question peu traitée, où il fallait faire un développement limité et appliquer les résultats des questions précédentes.

### **– Partie II –**

#### **Polynômes et nombres de Bernoulli**

1. a)  $B_1$  et  $B_2$  se calculaient à l'aide de  $B_3$ . Certains candidats ne l'ont pas réalisé.  
b) Cette question a donné lieu à des calculs assez longs, avec des erreurs parfois sur le terme constant.
2. Cette question n'était pas vraiment difficile mais demandait une bonne compréhension du texte et de la rigueur dans la rédaction. Ce fut très rarement le cas.
3. Question non évidente, réussie par quelques candidats avec de jolies preuves.
4. Question facile, pourtant peu traitée.

#### **Application au calcul de $\zeta(2k)$**

5. Il suffisait d'énoncer un théorème de convergence pour les séries de Fourier et de faire un petit changement de variable. Malheureusement, l'énoncé du théorème était souvent incorrect. C'est une question de cours !
6. Assez souvent réussie.
7. L'idée était de faire une double intégration par parties. Les candidats qui ont traité cette question l'ont généralement bien réussie.
8. Un bon nombre de candidats ont su « dire » que la fonction  $g_k$  était paire, mais peu l'ont justifié.
9. Rarement abordée.

#### **Application au calcul de $\sum_{k=1}^n k^p$**

10. a) Des erreurs pour cette question très simple. Certains candidats ne connaissent pas la définition d'endomorphisme.  
b) Le noyau a souvent été trouvé mais rarement avec une preuve complète.  
c) A peu près réussie.

11. Le lien avec la question précédente a rarement été vu, question peu traitée.
  12. Question difficile, exceptionnellement traitée.
  13. Question pas difficile qui demandait la compréhension des questions précédentes.  
Certains candidats l'ont réussie.
  14. Question rarement abordée.
-